

Zestaw zadań 12: Wyznaczanie wartości własnych.

Wszystkie zadania w niniejszym zestawie rozważamy nad ciałem $\mathbb{R}$.

1. Wykonaj kilka pierwszych iteracji metody potęg wyznaczania wartości własnych macierzy A zaczynając od wektora $x^{(0)}$, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & \text{b) } A &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \text{c) } A &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{d) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podaj przybliżenie największej wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego.

2. Wykonaj kilka pierwszych kroków metody QR dla macierzy A i zbadaj zbieżność kolejnych aproksymacji do wartości własnych, jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ d) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Wykonaj kilka pierwszych kroków metody QR z przesunięciami dla macierzy A , stosując jako przesunięcie μ współrzędną z dolnego prawego rogu macierzy otrzymanej po każdym kolejnym kroku i zbadaj zbieżność kolejnych aproksymacji do wartości własnych, jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ c) } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Przeprowadź redukcję macierzy A do formy Hessenberga, a następnie kontynuuj metodę QR , jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ c) } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ d) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Czy redukcja do formy Hessenberga uprasza obliczenia QR ?