

Zestaw zadań 11: Rozkład QR .

Wszystkie zadania w niniejszym zestawie rozważamy nad ciałem $\mathbb{R}$.

1. Korzystając z algorytmu Grama-Schmidta wyznacz rozkład $A = QR$, gdzie Q ma kolumny ortonormalne, a R jest macierzą górnątrójkątną, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Wyjaśnij różnicę między klasycznym a zmodyfikowanym algorytmem Grama-Schmidta i podaj przykład sytuacji, w której różnica ta ma znaczenie.

2.

- a) Skonstruuj transformację Householdera, która zeruje wszystkie współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ poza pierwszą.

- b) Dla danego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ wyprowadź wzór na macierz Householdera H spełniającą $Hx = \pm \|x\| e_1$.

- c) Sprawdź, że macierz Householdera H jest ortogonalna, symetryczna i spełnia $H^2 = I$.

3. Korzystając z transformacji Householdera wyznacz rozkład $A = QR$, gdzie Q ma kolumny ortonormalne, a R jest macierzą górnątrójkątną, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Wyjaśnij, dlaczego metoda Householdera jest numerycznie stabilniejsza niż klasyczny algorytm Grama-Schmidta.

4. Wykonaj rozkład QR z pivotowaniem kolumn dla macierzy A , jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} -32 & 54 & 70 & -56 \\ 74 & -8 & -6 & 5 \\ 35 & 61 & 38 & -52 \\ 26 & -46 & -20 & 35 \\ -38 & 45 & -61 & -8 \end{bmatrix}$.

Podaj przykład macierzy, dla której rozkład QR bez pivotowania prowadzi do niestabilnych obliczeń.

5. Rozwiąż układ równań liniowych $Ax = b$ stosując rozkład QR , jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Wyjaśnij, dlaczego rozkład QR jest preferowany w rozwiązywaniu układów równań, których macierz ma znacząco więcej wierszy niż kolumn.