

Zestaw zadań 10: Macierze dodatnio i ujemnie określone. Rozkład Choleskiego.

Wszystkie zadania w niniejszym zestawie rozważamy nad ciałem $\mathbb{R}$.

1. Rozstrzygnąć, które z poniższych macierzy są dodatnio lub ujemnie określone:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznaczyć lokalne minima i maksima następujących funkcji:

a) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$,

b) $f(x, y) = x^2y^2$,

c) $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 + 4y - 8$,

d) $f(x, y) = 2xy + 3x + 4y$,

e) $f(x, y) = 8xy(x + y) + 7$.

3. Znaleźć rozkład Choleskiego następujących macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 20 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$