

Zestaw zadań 9: Diagonalizacja ortogonalna. Twierdzenie spektralne. Mnożniki Givensa.

Wszystkie zadania w niniejszym zestawie rozważamy nad ciałem $\mathbb{R}$.

1. Sprawdź, czy macierz A jest ortogonalna, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{b) } A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{c) } A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{d) } A &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, & \text{e) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{f) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{g) } A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{h) } A &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & \text{i) } A &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Wyznacz macierz formy kwadratowej $q: V \rightarrow \mathbb{R}$, jeżeli:

$$\text{a) } V = \mathbb{R}^3, \quad q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2,$$

$$\text{b) } V = \mathbb{R}^4, \quad q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

3. Korzystając z twierdzenia spektralnego znaleźć macierz ortogonalną P taką, że P^TAP jest diagonalna, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, & \text{b) } A &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, & \text{c) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, & \text{d) } A &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, \\ \text{e) } A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \text{f) } A &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \text{g) } A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, & \text{h) } A &= \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Korzystając z macierzy obrotów Givensa znaleźć macierz ortogonalną P taką, że P^TAP jest diagonalna, jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$