

**Zestaw zadań 8: Dopełnienia ortogonalne, uzupełnienia ortogonalne, rzuty i symetrie.
Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta.**

1. Wyznacz dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ podprzestrzeni W względem funkcjonału dwuliniowego $f: V \times V \rightarrow F$, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$,

b) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$,

c) $F = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$,

d) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = \Re(z\bar{w})$, $W = \text{lin}(1 + i)$,

e) $V = \mathbb{Z}_5^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

2. Wyznacz dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ podprzestrzeni W względem funkcjonału dwuliniowego $f: V \times V \rightarrow F$. Znajdź, o ile istnieje, uzupełnienie ortogonalne W i rozstrzygnij, czy jest ono jednoznacznie wyznaczone, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$,

b) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$,

c) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v$, $W = \text{Sol}(\{x + 2y = 0\})$,

d) $F = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^2$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

3. Znajdź bazę ortogonalną przestrzeni (V, f) , gdzie $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonałem liniowym, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$,

b) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$,

c) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = \Re(z\bar{w})$.

4. Sprawdź, że $\mathcal{S}$ jest zbiorem ortogonalnym w przestrzeni (V, f) , gdzie $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonałem dwuliniowym, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = C([0, 1])$, $f(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) dx$, $\mathcal{S} = \{1, \cos(\pi x), \cos(2\pi x)\}$,

- b) $F = \mathbb{R}$, $V = L^2([-\pi, \pi])$, $f(f_1, f_2) = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) f_2(x) dx$, $\mathcal{S} = \{\sin(nx), \cos(nx) | n \geq 1\}$.
5. W przestrzeni ortogonalnej (V, f) , gdzie $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonalem dwuliniowym, znajdź wzory na rzut ortogonalny π_W przestrzeni V na podprzestrzeń W wzdłuż $W^\perp$, oraz symetrię ortogonalną σ_W przestrzeni V względem W i wzdłuż $W^\perp$, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,

b) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,

c) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{Sol}(\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\})$,

d) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = \Re(z\bar{w})$, $W = \text{lin}(1 + i)$.

6. Niech dla podprzestrzeni U przestrzeni (V, f) , gdzie $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonalem dwuliniowym, π_U oznacza rzut przestrzeni V na podprzestrzeń U wzdłuż podprzestrzeni $U^\perp$, zaś σ_U symetrię przestrzeni V względem U i wzdłuż $U^\perp$.

Niech W będzie podprzestrzenią V , a $(w_1, \dots, w_n)$ bazą ortogonalną W złożoną z wektorów nieizotropowych. Udowodnij następujące wzory:

a) $\pi_W(v) = \sum_{i=1}^n \frac{f(w_i, v)}{f(w_i, w_i)} w_i$, b) $\sigma_W(v) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{f(w_i, v)}{f(w_i, w_i)} w_i - v$,
c) $\pi_{W^\perp}(v) = v - \sum_{i=1}^n \frac{f(w_i, v)}{f(w_i, w_i)} w_i$, d) $\sigma_{W^\perp}(v) = v - 2 \sum_{i=1}^n \frac{f(w_i, v)}{f(w_i, w_i)} w_i$.

7. Korzystając z algorytmu Grama-Schmidta wyznacz bazę ortogonalną podprzestrzeni W przestrzeni ortogonalnej (V, f) , gdzie $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonalem dwuliniowym, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} v$, $W = V$,

b) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

c) $F = \mathbb{Z}_5$, $V = \mathbb{Z}_5^4$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

d) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = \Re(z\bar{w})$, $W = V$.

8. Wyznacz bazę ortogonalną podprzestrzeni W przestrzeni ortogonalnej (V, f) , gdzie $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonalem dwuliniowym, a następnie znajdź wzory na rzut ortogonalny π_W na W oraz symetrię ortogonalną σ_W względem W , jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T v$, $W = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

b) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = u^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$, $W = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,

c) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = \Re(z\bar{w})$, $W = \text{lin}(1)$.