

Zestaw zadań 7: Pojęcie funkcjonału dwuliniowego. Reprezentacja macierzowa funkcjonału dwuliniowego. Nieosobliwość. Przystawanie macierzy.

1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Sprawdzić, czy funkcja $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonałem dwuliniowym, jeżeli:

a) $F = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}^2, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1,$

b) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = (x_1 + x_2)(y_1 - y_2),$

c) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2y_1 + x_2y_2,$

d) $F = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^2, f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = u_1\bar{v}_1 + u_2v_2,$

e) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}^2, f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \Re(u_1v_1) + \Im(u_2)\Im(v_2),$

f) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot (v_1 + v_2 + v_3),$

g) $F = \mathbb{Z}_5, V = \mathbb{Z}_5^2, f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1,$

h) $F = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}^2, f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix},$

i) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = |u_1|v_1 + u_2v_2.$

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Sprawdzić, czy funkcja $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonałem dwuliniowym, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, f(p, q) = p(0)q(1),$

b) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}, f(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$

c) $F = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}, f(p, q) = \text{współczynnik przy } x^2 \text{ w wielomianie } p(x)q(x),$

d) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, f(p, q) = p'(0)q(0),$

e) $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[x], f(p, q) = \deg(p)q(0).$

3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Sprawdzić, czy funkcja $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonałem dwuliniowym, jeżeli:

a) $F = \mathbb{R}, V = C([0, 1]), f(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx,$

b) $F = \mathbb{R}, V = C([0, 1]), f(f_1, f_2) = \left(\int_0^1 f_1(x)dx\right)\left(\int_0^1 f_2(x)dx\right),$

- c) $F = \mathbb{R}$, $V = L^1(\mathbb{R})$, $f(f_1, f_2) = (f * g)(0)$, gdzie $(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt$,
- d) $F = \mathbb{R}$, $V = C^1([0, 1])$, $f(f_1, f_2) = f_1(0) f_2'(0)$.
4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Sprawdzić, czy funkcja $f: V \times V \rightarrow F$ jest funkcjonałem dwuliniowym, jeżeli:
- a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = \Re(zw)$,
- b) $F = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = zw$,
- c) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $f(z, w) = zw\overline{w}$,
- d) $F = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $f(a, b) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(ab)$, gdzie $\text{Tr}(\alpha)$ jest śladem odwzorowania liniowego $m_\alpha: V \rightarrow V$, $m_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$.
5. Wyznaczyć macierz funkcjonału $f: V \times V \rightarrow F$ w bazie $\mathcal{A}$, jeżeli:

- a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = 3xu - 2xv + yu$, $\mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,
- b) $F = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) = xu + yv + zw$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,
- c) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $f(p, q) = p(0)q(0)$, $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$,
- d) $F = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $f(a, b) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(ab)$, $\mathcal{A} = (1, \sqrt{2})$.

6. Wyznaczyć wzór funkcjonału $f: V \times V \rightarrow F$ przy danej jego macierzy A w bazie $\mathcal{A}$, jeżeli:

- a) $F = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,
- b) $F = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,
- c) $F = \mathbb{Z}_5$, $V = \mathbb{Z}_5^2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

7. Wyznaczyć macierz funkcjonału dwuliniowego $f: V \times V \rightarrow F$ w bazie $\mathcal{B}$ przy danej jego macierzy A w bazie $\mathcal{A}$, jeżeli:

- a) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,
- b) $F = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

8. Jak zmieni się macierz A funkcjonału $f: V \times V \rightarrow F$ w bazie $\mathcal{A}$, jeżeli w bazie tej:

- a) zamienimy miejscami dwa wektory;
- b) pomnożymy jeden z wektorów przez niezerowy skalar;

c) dodamy do jednego z wektorów inny pomnożony przez niezerowy skalar?

9. Rozstrzygnąć, czy macierze A i B są przystające nad ciałem F , jeżeli:

a) $F = \mathbb{Q}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, b) $F = \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,
c) $F = \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d) $F = \mathbb{C}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
e) $F = \mathbb{Z}_5$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Rozstrzygnąć, czy funkcjonal $f: V \times V \rightarrow F$ o macierzy A w pewnej bazie jest nieosobliwy, jeżeli:

a) $F = \mathbb{Q}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $F = \mathbb{C}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, c) $F = \mathbb{Z}_5$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.