

Zestaw zadań 6: Łańcuchy Markowa.

1. Wskaż, które z poniższych macierzy są stochastyczne i które z nich są regularne (czyli mają pewną potęgę z wyłącznie dodatnimi elementami):

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0,8 & 0,0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej stochastycznej macierzy P sprawdź, czy istnieje granica $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$, i jeśli tak, to co można o niej powiedzieć.

2. Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa, a s_m wektorem stanu po m przejściach, czyli $s_m = P s_{m-1}$.

a) Dla macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,7 \end{bmatrix}$ oblicz s_1, s_2, s_3 , jeśli początkowy wektor stanu to $s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Czy wektory s_m zblizają się do jakiegoś wektora granicznego?

b) Dla macierzy $P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}$ znajdź s_3 , jeśli $s_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Oblicz graniczny wektor stanu s , który spełnia $P s = s$.

c) Niech $P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$. Jeśli proces zaczyna się w stanie 1, oblicz prawdopodobieństwo bycia w stanie 2 po trzech krokach.

3.

- a) Wilk poluje w lesie w jednym z trzech obszarów łowieckich A, B, C . Jeśli jednego dnia poluje w A , to następnego poluje w A z prawdopodobieństwem $1/2$ albo w C z prawdopodobieństwem $1/2$. Jeśli poluje w B lub C , jest tak samo prawdopodobne, że następnego dnia będzie polował w A, B lub C .

Zapisz odpowiadającą macierz przejścia P . Jeśli wilk zaczyna polować w A , to długookresowo jaką część czasu spędzi w każdym obszarze łowieckim?

- b) Społeczeństwo dzieli się na klasy: ludową, średnią i wyższą. Transfery pomiędzy poszczególnymi klasami społecznymi zależą od statusu społecznego rodziców w następujący sposób: dzieci klasy wyższej pozostają w klasie wyższej z prawdopodobieństwem 70%, z prawdopodobieństwem 10% spadają do klasy średniej, a z prawdopodobieństwem 20% do klasy ludowej. Dzieci klasy średniej pozostają w klasie średniej z prawdopodobieństwem 80% i z takim samym prawdopodobieństwem mogą zarówno awansować do klasy wyższej, jak i zdegradować się do klasy ludowej. Dzieci klasy ludowej pozostają w niej z prawdopodobieństwem 60% i mają 30% szansę awansu do klasy średniej oraz 10% szansę awansu do klasy wyższej.

Zapisz macierz przejścia P . Znajdź wektor stanu granicznego s .

4.

- a) Uzasadnij, że jeśli macierz stochastyczna ma wartość 1 na głównej przekątnej (czyli istnieje stan, który z prawdopodobieństwem 1 przechodzi w siebie), to nie może być regularna.

- b) Niech P będzie stochastyczną macierzą 2×2 :

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}, \quad 0 < p, q < 1.$$

Pokaż, że $s = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ jest wektorem stanu granicznego. Wykaż, że P^k zbiega do macierzy, której kolumny są równe s dla $k \rightarrow \infty$.