

Zestaw zadań 5: Model przepływów międzygałęziowych Leontiefa.

1. Dla macierzy wejść–wyjść E znajdź niezerowy wektor cen równowagi $\mathbf{p}$, który spełnia $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } E &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}, & \text{b) } E &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}, & \text{c) } E &= \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix}, \\ \text{d) } E &= \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}, & \text{e) } E &= \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Dla poniższych opisów zapisz macierz wejść–wyjść E i wyznacz wektor cen równowagi:

- a) trzy branże A, B, C : cała produkcja A jest zużywana przez B , B przez C , a C przez A ;
- b) cztery branże W, X, Y, Z : W i X zużywają między sobą produkcję w równych proporcjach, Y zużywa produkty W, X, Z w proporcjach $0,2; 0,3; 0,4$, a Z zużywa produkty X i Y po $0,5$;
- c) trzy branże, z których każda zużywa wyłącznie własną produkcję;
- d) cztery branże w cyklu: $A \rightarrow B - 0,6$, $B \rightarrow C - 0,5$, $C \rightarrow D - 0,4$, $D \rightarrow A - 0,3$, pozostałe $0,1$ to zużycie wewnętrzne;
- e) pięć branż, gdzie suma współczynników w każdym wierszu macierzy E jest równa 1 – opisz wszystkie możliwe wektory równowagi.

3. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenia:

- a) jeżeli E jest macierzą stochastyczną, to suma współczynników $E\mathbf{c}$ jest równa sumie współczynników $\mathbf{c}$;
- b) jeżeli $(I - E)^{-1} \geq 0$, to istnieje wektor $\mathbf{p} > 0$ taki, że $E\mathbf{p} < \mathbf{p}$;
- c) jeśli $E\mathbf{p} < \mathbf{p}$ dla $\mathbf{p} > 0$, to istnieje $0 < \mu < 1$ takie, że $E\mathbf{p} < \mu\mathbf{p}$;
- d) dla każdej macierzy stochastycznej istnieje niezerowy wektor $\mathbf{p} \geq 0$ spełniający $E\mathbf{p} = \mathbf{p}$;
- e) jeśli suma współczynników $\mathbf{p}$ wynosi 1, to $\mathbf{p}$ można interpretować jako udziały rynkowe.

4.

- a) Zapisz równania modelu zamkniętego: $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
- b) Zapisz równania modelu otwartego: $(I - E)\mathbf{x} = \mathbf{d}$.
- c) Rozwiąż układ dla:

$$E = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

- d) Zinterpretuj ekonomicznie otrzymane rozwiązanie.

e) Sprawdź, czy $(I - E)$ jest odwracalna.

5. Sprawdź, czy układ $(I - E)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ma rozwiązanie dodatnie, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } E &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } E = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}, \\ \text{c) } E &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 25 \\ 18 \\ 30 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$