

Zestaw zadań 4: Rozkład LU

1. Wykonaj faktoryzację $A = LU$, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & -7 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \\ \text{d) } A &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Znajdź macierz permutacji P i faktoryzację $PA = LU$, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{d) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Dla danej faktoryzacji $A = LU$ rozwiąż układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ \text{b) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } A &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \\ \text{d) } A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ \text{e) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Rozstrzygnij, czy istnieje faktoryzacja $A = LU$ (bez macierzy permutacji P), jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Udowodnij lub obaj następujące stwierdzenia:

- a) jeśli L i U są jednostkowo trójkątne (tzn. są macierzami trójkątnymi, które na głównej przekątnej mają wyłącznie jedynki) i $A = LU$, to rozkład jest jednoznaczny;

- b) każdą zamianę wierszy można zapisać za pomocą operacji elementarnych innych niż tylko zamiana wierszy;
- c) jeżeli macierz A nie posiada zer na przekątnych w kluczowych etapach eliminacji, to istnieje dla niej faktoryzacja LU bez macierzy permutacji P ;
- d) macierze trójkątne dolne i górne są odwracalne jeśli wszystkie ich elementy na przekątnej są niezerowe.

6. Znajdź faktoryzację $A = LU$, oblicz $\det A$ i rozwiąż układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jeżeli:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 25 \end{bmatrix}, & \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, \\ \text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}, & \text{d) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}, \\ \text{e) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{array}$$