

Zestaw zadań 3: Wartości i wektory własne. Wielomian charakterystyczny endomorfizmu. Diagonalizacja.

1. Endomorfizm $\varphi \in \text{End } \mathbb{C}^2$ ma w bazie $\mathcal{A}$ macierz A . Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im wektory własne φ , jeżeli:

a) $\mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right)$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$;
c) $\mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; d) $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right)$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Znaleźć, o ile to możliwe, macierz $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ taką, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$,
d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_3^3$, e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_3^3$, f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_3^3$,
g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4^4$, h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4^4$, i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4^4$.

3. Wyznaczyć wzór na $A^n \in \mathbb{R}_2^2$, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

4. Rozwiązać następujące układy liniowych równań różniczkowych:

a) $\begin{cases} y'_1 = 3y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y'_1 = 7y_1 + 4y_2 + 12y_3 \\ y'_2 = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y'_3 = -3y_1 - 2y_2 - 5y_3 \end{cases}$.

5. Znaleźć wzór na n -ty wyraz ciągu a_n , jeżeli:

a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$, $n \geq 2$ b) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-3} + 2a_{n-2} + 3a_{n-1}$, $n \geq 3$.