

Zestaw zadań 2: Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego. Podobieństwo macierzy.

1. W przestrzeni F^3 , gdzie F jest pewnym ciałem, wybrano bazy

$$\mathcal{A}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ oraz } \mathcal{B}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

zaś w przestrzeni F^4 bazy

$$\mathcal{A}_4 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ oraz } \mathcal{B}_4 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\varphi: F^n \rightarrow F^m$ w bazach $\mathcal{A}_n$ i $\mathcal{A}_m$ ($\mathcal{A}_n$ i $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{B}_n$ i $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_n$ i $\mathcal{B}_m$) jeżeli

$$\begin{aligned} \text{a) } n=m=3, \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}, & \text{b) } n=m=3, \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x-y+z \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\ \text{c) } n=4, m=3, \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z+t \\ x+z-t \end{bmatrix}, & \text{d) } n=4, m=3, \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z-t \\ x-z-t \end{bmatrix}, \\ \text{e) } n=3, m=4, \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x+3y-2z \\ x+y+z \\ 2y \\ y+z \end{bmatrix}, & \text{f) } n=3, m=4, \varphi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} x+3y-2z \\ x+y+z \\ 2y-3z \\ 2x+4y+z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Przekształcenie $\varphi: F^n \rightarrow F^m$, gdzie F jest pewnym ciałem, ma w bazach $\mathcal{A}$ przestrzeni F^n

i $\mathcal{B}$ przestrzeni F^m macierz A . Wyznaczyć wzór analityczny na $\varphi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$, jeżeli:

$$\text{a) } n=2, m=3, \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } n=m=3, \mathcal{A}=\mathcal{B}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_3), A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } n=m=3, \mathcal{A}=\mathcal{B}=(\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1+\varepsilon_3), A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane są bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Wyznaczyć macierze przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ i od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$, jeżeli:

$$\text{a) } n=2, \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right),$$

$$\text{b) } n=3, \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right),$$

$$\text{c) } n=4, \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

4. Przekształcenie $\varphi: F^n \rightarrow F^m$, gdzie F jest pewnym ciałem, ma w bazach $\mathcal{A}_1$ przestrzeni F^n i $\mathcal{B}_1$ przestrzeni F^m macierz A . Wyznaczyć macierz tego przekształcenia w bazach $\mathcal{A}_2$ przestrzeni F^n i $\mathcal{B}_2$ przestrzeni F^m , jeżeli:

$$\text{a) } n=3, m=4, \mathcal{A}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \mathcal{A}_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4),$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } n=3, m=2, \mathcal{A}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \mathcal{A}_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } n=2, m=4, \mathcal{A}_1 = (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2), \mathcal{A}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_4),$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right), A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Przekształcenie $\varphi: F^n \rightarrow F^m$, gdzie F jest pewnym ciałem, ma w bazach $\mathcal{A}$ przestrzeni F^n i $\mathcal{B}$ przestrzeni F^m macierz A . Jak zmieni się macierz A , jeżeli:

- a) w bazie $\mathcal{A}$ zamienimy miejscami dwa wektory;
- b) w bazie $\mathcal{B}$ zamienimy miejscami dwa wektory;
- c) w bazie $\mathcal{A}$ pomnożymy jeden wektor przez niezerowy skalar;
- d) w bazie $\mathcal{B}$ pomnożymy jeden wektor przez niezerowy skalar;
- e) do jednego z wektorów bazy $\mathcal{A}$ dodamy inny pomnożony przez niezerowy skalar;
- f) do jednego z wektorów bazy $\mathcal{B}$ dodamy inny pomnożony przez niezerowy skalar?

6. Endomorfizm $\varphi \in \text{End } F^n$, gdzie F jest pewnym ciałem, ma w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni F^n macierz A . Znaleźć macierz tego endomorfizmu w bazie $\mathcal{B}$, jeżeli:

$$\text{a) } n=3, \mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \mathcal{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1), A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } n=2, \mathcal{A} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right), A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$