

Zestaw zadań 1: Pojęcie przekształcenia liniowego. Obrazy i jądra. Obrazy i przeciwobrazy podprzestrzeni.

1. Zbadać, które z podanych niżej funkcji są przekształceniami liniowymi:

$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}, & \text{b) } \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z+2 \end{bmatrix}, \\ \text{c) } \varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z \\ x+z-t \end{bmatrix}, & \text{d) } \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x+y \\ x+2z \\ y-z \\ 3x \end{bmatrix}, \\ \text{e) } \varphi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x+3y+4z \end{bmatrix}, & \text{f) } \varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3, \varphi([x]) &= \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{bmatrix}, \\ \text{g) } \varphi: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x+2y+z \\ 3y+t \\ x+z+4t \end{bmatrix}, & \text{h) } \varphi: \mathbb{Z}_7^2 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3, \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x+y \\ 0 \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jeżeli dana funkcja jest przekształceniem liniowym, wyznaczyć jej jądro i obraz. Czy jest monomorfizmem? A epimorfizmem?

2. Zbadać, które z podanych niżej funkcji są przekształceniami liniowymi:

$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi: C^k(a, b) &\rightarrow C^{k-1}(a, b), \varphi(f) = f', \\ \text{b) } \varphi: C(a, b) &\rightarrow \mathbb{R}, \varphi(f) = \int_a^b f(t) dt, \\ \text{c) } \varphi: C(-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R}, \varphi(f) = f(0). \end{aligned}$$

Jeżeli dana funkcja jest przekształceniem liniowym, to czy jest monomorfizmem? A epimorfizmem?

3. Udowodnić, że F jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$, a następnie sprawdzić, czy funkcja $\varphi: F \rightarrow F$ jest przekształceniem liniowym, jeżeli:

$$\begin{aligned} \text{a) } F &= \mathbb{C}, \varphi(z) = \bar{z}, \\ \text{b) } F &= \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}, \\ \text{c) } F &= \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in \mathbb{C} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}, \varphi(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) = a + c\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4}, \\ \text{d) } F &= \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{C} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}, \varphi(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}) = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - 2d\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Jeżeli dana funkcja jest przekształceniem liniowym, wyznaczyć jej jądro i obraz. Czy jest monomorfizmem? A epimorfizmem?

4. Przekształcenie liniowe $\varphi: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ dane jest wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}.$$

Udowodnić, że U jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^2$ i wyznaczyć $\varphi(U)$, jeżeli

$$\text{a) } U = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \mid t \in \mathbb{Q} \right\}, \quad \text{b) } U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \mid t \in \mathbb{Q} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \mid t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Udowodnić, że V jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^3$ i wyznaczyć $\varphi^{-1}(V)$, jeżeli

$$\text{a) } V = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 3t \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid t \in \mathbb{Q} \right\}, \quad \text{b) } V = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid t \in \mathbb{Q} \right\}, \quad \text{c) } V = \text{Sol}(x + y + z = 0).$$