

1 Pojęcie przekształcenia liniowego Obrazy i jądra. Obrazy i przeciwobrazy podprzestrzeni.

Przekształceniem liniowym jest funkcja $\varphi: V \rightarrow W$ pomiędzy dwoma przestrzeniami wektorowymi V i W nad ciałem F , która zachowuje działania dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary:

$$\text{i. } \forall v, w \in V \quad [\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)],$$

$$\text{ii. } \forall a \in F \forall v \in V \quad [\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)].$$

Możemy powyższe dwa warunki zastąpić jednym:

Uwaga 1.1. Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem F . Funkcja $\varphi: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall a, b \in F \forall v, w \in V \quad [\varphi(av + bw) = a\varphi(v) + b\varphi(w)].$$

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Przykład 1.2. Funkcja $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zdefiniowana wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ x+y \end{bmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym. Istotnie, ustalmy $a, b \in \mathbb{R}$ oraz wektory $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \varphi\left(a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} ax + bx' \\ ay + by' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ay + by' \\ ax + bx' \\ (ax + bx') + (ay + by') \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} y \\ x \\ x+y \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y' \\ x' \\ x'+y' \end{bmatrix} = a\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + b\varphi\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Podobnie funkcja $\varphi: C^\infty[a, b] \rightarrow C^\infty[a, b]$ dana wzorem

$$\varphi(f) = f'$$

jest przekształceniem liniowym; wynika to wprost z twierdzeń analizy matematycznej warunkujących zachowanie pochodnych:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g', \\ (a \cdot f)' &= a \cdot f', \end{aligned}$$

dla $f, g \in C^\infty[a, b]$ oraz $a \in \mathbb{R}$.

Izomorfizmem nazywamy przekształcenie liniowe, które dodatkowo jest bijekcją, **monomorfizmem** przekształcenie, które jest różnowartościowe, zaś **epimorfizmem** – „na”. Dodatkowo przekształcenia liniowe $\varphi: V \rightarrow V$ nazywamy często **endomorfizmami**, zaś endomorfizmy, które dodatkowo są izomorfizmami nazywamy **automorfizmami**.

Przeciwdziedzinę przekształcenia liniowego $\varphi: V \rightarrow W$ zwyczajowo nazywamy **obrazem** i oznaczamy $\text{Im } \varphi$:

$$\text{Im } \varphi = \{w \in W \mid \exists v \in V [w = \varphi(v)]\}.$$

Wprost z definicji obrazu wynika, że φ jest endomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Im } \varphi = W$. Odnosimy następującą własność obrazów:

Uwaga 1.3. Niech $\varphi: V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas $\text{Im } \varphi < W$.

Dowód. Istotnie, ustalmy $a, b \in F$ oraz $w, w' \in \text{Im } \varphi$. Niech $v, v' \in V$ będą takie, że $\varphi(v) = w$ oraz $\varphi(v') = w'$. Wówczas:

$$aw + bw' = a\varphi(v) + b\varphi(v') = \varphi(av + bv') \in \text{Im } \varphi \quad \square$$

Pojęciem dualnym do obrazu jest **jądro** przekształcenia liniowego, które oznaczamy przez $\text{Ker } \varphi$ i definiujemy jako przeciwobraz wektora zerowego:

$$\text{Ker } \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}.$$

Także i jądro jest podprzestrzenią:

Uwaga 1.4. Niech $\varphi: V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas $\text{Ker } \varphi < V$.

Dowód. Ustalmy $a, b \in F$ oraz $v, v' \in \text{Ker } \varphi$. Wówczas $\varphi(v) = \theta$ i $\varphi(v') = \theta$. Wobec tego:

$$\varphi(av + bv') = a\varphi(v) + b\varphi(v') = a\theta + b\theta = \theta,$$

a więc $av + bv' \in \text{Ker } \varphi$. $\square$

Przykład 1.5. Obliczmy obraz i jądro przekształcenia liniowego $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ z Przykładu 1.2 danego wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \begin{bmatrix} y \\ x \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} y \\ x \\ x + y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\text{Ker } \varphi &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} y \\ x \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{Sol}\left(\begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ x+y=0 \end{cases}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Dzięki pojęciu jądra możemy w łatwy sposób charakteryzować monomorfizmy:

Stwierdzenie 1.6. *Niech $\varphi: V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Ker } \varphi = \{\theta\}$.*

Dowód. Dla dowodu implikacji $(\Rightarrow)$ założmy, że φ jest monomorfizmem. Oczywiście

$$\varphi(\theta) = \varphi(0 \cdot \theta) = 0 \cdot \varphi(\theta) = \theta,$$

a skoro φ jest monomorfizmem, a więc funkcją równowartościową, to jedynym wektorem odwzorowywanym na θ będzie θ .

Na odwrót, dla dowodu przeciwnej implikacji $(\Leftarrow)$ założmy, że $\text{Ker } \varphi = \{\theta\}$. Niech $v, v' \in V$ będą takimi wektorami, że $\varphi(v) = \varphi(v')$. Wówczas

$$\varphi(v - v') = \varphi(v) - \varphi(v') = \theta,$$

a więc $v - v' \in \text{Ker } \varphi$. Ale $\text{Ker } \varphi = \{\theta\}$, więc koniecznie $v - v' = \theta$, czyli $v = v'$. □

Przykład 1.7. Na podstawie przeprowadzonych w Przykładzie 1.5 obliczeń stwierdzamy, że przekształcenie liniowe $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ z Przykładu 1.2 jest monomorfizmem.

Podobnie jak w przypadku funkcji możemy też dla przekształceń liniowych rozpatrywać teoriiomnogościowe obrazy i przeciwobrazy zbiorów. Szczególnie interesujący jest tu przypadek, gdy rozważamy obrazy lub przeciwobrazy podprzestrzeni poprzez przekształcenia liniowe:

Uwaga 1.8. Niech $\varphi: V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym, niech ponadto $V' < V$ oraz $W' < W$. Wówczas $\varphi(V') < W$ oraz $\varphi^{-1}(W') < V$.

Prosty dowód zostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.