

Zestaw zadań 6: granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych.

1. Obliczyć granicę:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} (x^2y^3 - 4y^2)$, b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} \frac{x^2y - xy^3}{x - y + 2}$,
c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$, d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} e^{\sqrt{2x-y}}$,
e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left(\frac{x^2y^3 - x^3y^2}{x^2 - y^2} \right)$, f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{\pi}{2})} \frac{\cos y - \sin 2y}{\cos x \cos y}$.

2. Uzasadnić, że żadna z poniższych granic nie istnieje:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$, b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + 3y^2}$, c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy^2}{x^4 + y^2}$.

3. Wyznaczyć granicę, o ile istnieje, lub pokazać, że nie istnieje:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{1}{2})} e^{xy} \sin xy$, b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x - y}{4x^2 - y^2}$,
c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$, d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$,
e) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$, f) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^4 + y^2 + z^3}{x^4 + 2y^2 + z}$.

4. Obliczyć granicę:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^4 + y^4}$.

5. Wyznaczyć punkty, w których funkcja jest ciągła, jeżeli:

a) $f(x, y) = \frac{xy}{1 + e^{x-y}}$, b) $f(x, y) = \cos \sqrt{1 + x - y}$, c) $f(x, y) = \frac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$,
d) $f(x, y) = \ln(1 + x - y)$, e) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2} \ln z$, f) $f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$.