

**Zestaw zadań 5: całki funkcji jednej zmiennej.**

1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

- a)  $\int (5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})dx$ , b)  $\int (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)dx$ ,  
c)  $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ , d)  $\int \frac{x}{(x^2+3)^6}dx$ ,  
e)  $\int \sqrt{3x+1}dx$ , f)  $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2-1}}dx$ ,  
g)  $\int \sin^5 x \cos x dx$ , h)  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$ ,  
i)  $\int \cos x e^{\sin x} dx$ , j)  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ ,  
k)  $\int 6^{1-x} dx$ , l)  $\int \frac{\ln|\operatorname{arctg} x|}{1+x^2} dx$ ,  
m)  $\int \frac{(\pi - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , n)  $\int x^3 e^x dx$ ,  
o)  $\int x \cos x dx$ , p)  $\int e^x \cos x$ ,  
q)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ , r)  $\int x^3 (\ln x)^2 dx$ .

2. Obliczyć następujące całki oznaczone:

- a)  $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4} dx$ , b)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$ , c)  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ , d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$ .

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

- a)  $y = x^2, y^2 = x$ , b)  $y^2 = x, x^2 = 8y$ , c)  $y = x^3, y = 4x$ , d)  $y = x^3, y^2 = x$ ,  
e)  $y = x^2, 2x - y + 3 = 0$ , f)  $y = 2x - x^2, y = -x$ , g)  $xy = 4, x + y = 5$ , h)  $y^2 = 8x, 8y = x^2$ .

4.

- a) Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót obszaru ograniczonego krzywymi  $y = x^3, y = 8$  oraz  $x = 0$  wokół osi  $Oy$ .  
b) Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót obszaru ograniczonego krzywymi  $y = x$  oraz  $y = x^2$  wokół osi  $Ox$ .  
c) Obliczyć objętość bryły, której postawą jest koło o promieniu 1, a cięcia prostopadłe do podstawy tworzą trójkąty równoboczne.

5. Obliczyć długości następujących łuków:

- a)  $y^2 = 4x^3, y > 0, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}$ , b)  $9y^2 = 4x^3, 0 \leq x \leq 3$ , c)  $9y^2 = 2x^3, 0 \leq x \leq 2$ ,  
d)  $3y^2 = 4x^3, 0 \leq x \leq 1$ , e)  $9y^2 = x^3, 0 \leq x \leq 12$ , f)  $2y^2 - 3x^3 = 0, 0 \leq x \leq 2$ .

6. Obliczyć powierzchnię bryły powstałej przez obrót następującej krzywej wokół osi  $Ox$ :

- a)  $y = \sin^{\frac{7}{2}} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , b)  $y = \cos^{\frac{7}{2}} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , c)  $y = \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2-6x+15}}, 0 \leq x \leq 1$ ,  
d)  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , e)  $x^2 + y^2 - 20y + 75 = 0$ , f)  $3y^2 = 4x, 0 \leq x \leq 1$ .