

Zestaw zadań 4: Izometrie przestrzeni ortogonalnych

- (1) Niech ρ będzie metryką euklidesową przestrzeni E . Wykazać, że $\rho(X, Y) = \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$ tylko wtedy, gdy punkty X, Y, Z są współliniowe.
- (2) W afinicznej przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym
 - (a) znaleźć obraz punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny $H = \text{Sol}(X + 3Y - Z = 1)$ oraz obraz tego punktu w rzucie prostopadłym na prostą $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, 1]\right)$,
 - (b) znaleźć wzory określające symetrię prostopadłą względem płaszczyzny H oraz rzut prostopadły na płaszczyznę H , jeśli $H = \text{Sol}(X + 3Y - Z = 2)$,
 - (c) znaleźć równanie ogólne obrazu prostej $\frac{X-1}{-1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z+1}{1}$ w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny $H = \text{Sol}(Y - Z = 1)$ oraz znaleźć równanie ogólnie rzutu tej prostej na płaszczyznę H .
- (3) W afinicznej przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym wyznaczyć rzut prostopadły prostej $af((0, 0, 0, 0), (4, -1, -3, 4))$ na podprzestrzeń afiniczną $af((1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 2))$.
- (4) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym wyznacz odległość punktu $(1, 0, 1, 2)$ od jego obrazu w symetrii względem:
 - (a) $H = \text{Sol}(X_1 - 2X_3 + X_4 = 1)$,
 - (b) $H = af((1, 1, 0, 0), (2, 1, 3, 5), (-1, 2, 3, 0))$.
- (5) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^6)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć odległość punktu $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ od jego obrazu w symetrii względem hiperpłaszczyzny $H = \text{Sol}(X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 7X_5 + 9X_6 = 72)$.
- (6) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^5)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć długości boków trójkąta o wierzchołkach $(2, 4, 2, 4, 2), (6, 4, 4, 4, 6), (5, 7, 5, 7, 2)$.
- (7) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym znaleźć taki punkt, ze jego odległości od punktów $(2, 3), (4, 2), (-1, 0)$ są równe.
- (8) Dana jest przestrzeń euklidesowa $(A(\mathbb{R}^3, q))$, gdzie $q([x, y, z]) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2$. Znaleźć:
 - (a) miary kątów trójkąta PQR , gdzie $P = (1, 0, 0), Q = (0, 1, 0), R = (0, 0, 1)$;
 - (b) miary kątów trójkąta ABC , gdzie $A = (0, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (1, 0, 0)$;
 - (c) miarę kąta pomiędzy prostą $af((0, 0, 0), (1, 0, 0))$ a płaszczyzną $af((0, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 3, 1))$.
- (9) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym wyznacz miarę kąta:
 - (a) pomiędzy prostymi $af((1, 2, -4), (4, 0, -10))$ oraz $af((2, 6, -2), (-2, 6, 8))$;
 - (b) pomiędzy prostymi $L_1 = \text{Sol}(3X - 4Y - 2Z = 0, 2X + Y - 2Z = 0)$ oraz $L_2 = \text{Sol}(4X + Y - 6Z = 2, Y - 3Z = -2)$;
 - (c) pomiędzy prostą $af((5, 1, 2), (11, -2, 3))$ a płaszczyzną $\text{Sol}(7X + 2Y - 3Z = -5)$;
 - (d) pomiędzy prostą $\text{Sol}(X + Y - Z = 0, 2X - 3Y + Z = 0)$, a płaszczyzną $af((1, -1, 0), (-2, 0, -1), (-1, 1, 0))$;
 - (e) pomiędzy płaszczyznami $\text{Sol}(X - 2Y + Z = 1)$ oraz $\text{Sol}(X + 2Y - Z = 3)$;
 - (f) pomiędzy każdą parą spośród płaszczyzn $af((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)), af((2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 0))$,
- (10) Oblicz kąt pomiędzy ścianą a przekątną sześcianu oraz kąt pomiędzy krawędzią a przekątną sześcianu.
- (11) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym znajdź:
 - (a) równanie płaszczyzny zawierającej prostą $(0, 0, 0) + \text{lin}([1, 0, 0])$ i tworzącej z płaszczyzną $\text{Sol}(X - Y = 0)$ kąt o mierze 30° .

- (b) równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(0, 0, 0)$, prostopadłej do płaszczyzny $Sol(5X - 2Y + 5Z = 10)$ i tworzącej z płaszczyzną $Sol(X - 4Y - 8Z = -12)$ kąt o mierze 45° .
- (12) W przestrzeni euklidesowej $(A(\mathbb{R}^2), \xi)$, gdzie $q_\xi([x, y]) = x^2 - 4xy + 5y^2$ znaleźć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $[1, 1], [2, 1]$ i zaczepionego w punkcie $(1, 1)$.
- (13) W przestrzeni euklidesowej $(A(\mathbb{R}^3), \xi)$, gdzie $q_\xi([x, y, z]) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ znaleźć pole równoległościanu rozpiętego na wektorach $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$ i zaczepionego w punkcie $(0, 0, 0)$ oraz pole trójkąta o wierzchołkach $(1, 0, 0), (2, 1, 0), (3, 3, 1)$.
- (14) W przestrzeni euklidesowej $(A(\mathbb{R}^3), \xi)$, gdzie $q_\xi([x, y, z]) = x^2 + 2xy + 3y^2 + z^2$ znaleźć:
- odległość punktu $(1, 1, 1)$ od prostej $af(1, 2, 1), (2, 2, 1)$,
 - odległość punktu $(1, 1, 1)$ od płaszczyzny $Sol(2X - Y - Z = 1)$,
 - odległość prostych $L_1 = Sol(2X_1 + X_2 + 3X_3 = 5, 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 4), L_2 = Sol(X_1 + X_2 - 2X_3 = 2, 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 8)$.
- (15) W afinicznej przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym wyznaczyć:
- odległość punktu $(1, 0, 1)$ od prostej $af((-1, 2, 1), (1, 5, 7))$,
 - odległość punktu $(1, 1, 1)$ od płaszczyzny $af((-1, 2, 0), (-2, 5, -1), (0, 3, -3))$.
- (16) W afinicznej przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć odległość punktu P od podprzestrzeni H :
- $P = (2, 4, 0, -1), H = Sol(2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 0, 2X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 4X_4 = 0)$,
 - $P = (3, 3, -1, -1), H = Sol(2X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 2X_4 = 0)$.
- (17) W przestrzeni euklidesowej $A(\mathbb{R}^n)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć odległość G od H jeśli:
- $n = 3, G = af((7, 8, 9), (8, 8, 10)), H = af((9, 7, 7), (10, 9, 7))$,
 - $n = 4, G = af((3, 4, 10, 6), (5, 6, 12, 8)), H = af((5, 4, 12, 7), (3, 6, 10, 8))$.
- (18) Wykazać, że
- $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta)$
 - suma dwóch wektorów izotropowych jest wektorem izotropowym wtedy i tylko wtedy, gdy składniki są do siebie prostopadłe.
 - Obliczyć wszystkie kąty, jakie tworzą ze sobą półproste o początkach P, Q prostych $P + \text{lin}(\alpha)$ i $Q + \text{lin}(\beta)$; sprawdzić, że te cztery kąty mają dwie wartości miary łukowej dające w sumie π . Jeśli proste $P + \text{lin}(\alpha)$ i $Q + \text{lin}(\beta)$ mają punkt wspólny R , to $P + \text{lin}(\alpha) = R + \text{lin}(\alpha)$ i $Q + \text{lin}(\beta) = R + \text{lin}(\beta)$; dla półprostych z początkiem R każdą z par kątów o równej mierze łukowej nazywamy **kątami wierzchołkowymi**; każdą z par kątów o sumie miar łukowych równej π nazywamy **kątami przyległymi**. Narysować. **Kątem między prostymi** nazywamy ten z przyległych kątów, którego miara nie przekracza $\frac{\pi}{2}$.
- (19) Niech O, P, Q będą takimi punktami przestrzeni euklidesowej, że $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ są liniowo niezależne, $R \in af(O, P, Q)$, $q(\overrightarrow{OP}) = q(\overrightarrow{OQ}) = q(\overrightarrow{OR})$, $R \neq P$ (narysuj!). Wykazać, że $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OQ}$. (Wskazówka: wywnioskować z nierówności Schwartz'a, że $q(\overrightarrow{OP}) > |\xi(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})|$).
- (20) **Kątem wewnętrznym przy wierzchołku P** trójkąta o wierzchołkach P, Q, R nazywamy kąt między tymi półprostymi prostych $af(P, Q)$ i $af(P, R)$, które mają początek P i zawierają punkty Q i R odpowiednio (narysować).
- sprawdzić, że suma miar łukowych kątów wewnętrznych trójkąta jest równa π ;

(b) obliczyć długości boków i miary kątów wewnętrznych trójkąta o wierzchołkach $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ w przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym;

(c) obliczyć długości boków i miary kątów wewnętrznych trójkąta o wierzchołkach $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ w przestrzeni $E(\mathbb{R}^5)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym;

(d) wykazać, że trójkąt PQR jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy ma jednakowe wszystkie kąty wewnętrzne.

(21) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym punkty $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Znaleźć trzeci wierzchołek.

(22) **Kątem między prostą (półprostą) a podprzestrzenią** nazywamy kąt między tą prostą (półprostą) i jej rzutem prostopadłym na tę podprzestrzeń.

(a) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć kąt między $af(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

i $af(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

(b) Co będzie kątem między prostą i podprzestrzenią, gdy rzut prostej na podprzestrzeń nie jest prostą?

(23) (a) Obliczyć miarę kąta między ścianą a przekątną sześcianu i między krawędzią a przekątną sześcianu.

(b) Obliczyć miary wszystkich kątów, jakie tworzą ze sobą przekątne sześcianu.

(24) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^6)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć odległość punktu $(0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ od jego obrazu w symetrii względem hiperpłaszczyzny $x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 9x_6 = 72$.

(25) W przestrzeni euklidesowej $E(\mathbb{R}^5)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć długości boków trójkąta o wierzchołkach $(2, 4, 2, 4, 2)^T$, $(6, 4, 4, 4, 6)^T$, $(5, 7, 5, 7, 2)^T$.

(26) W przestrzeni euklidesowej E dane są dwa różne punkty P i Q . Sprawdzić, że zbiór punktów równo oddalonych od P i od Q jest hiperpłaszczyzną $\{X \in E : \xi(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}q(\overrightarrow{PQ})\}$.

(27) Znaleźć taki punkt przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym, że jego odległości od punktów $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ są jednakowe.

- (28) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym znaleźć punkt na prostej:
- (a) $4x + 3y = 12$ równo odległy od punktów $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$;
- (b) $3x + 2y = 5$ równo odległy od punktów $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (29) Obliczyć odległość między rzutem prostopadłym punktu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ na hiperpłaszczyznę o równaniu $-x + 19y + 9z + 17t = 732$ a jego obrazem w symetrii względem hiperpłaszczyzny o równaniu $x + 5y + 5z + 7t + 100 = 0$ w przestrzeni $E(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym.
- (30) Na płaszczyźnie $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym wyprowadzić wzór
- (a) na odległość od początku układu współrzędnych; (b) na odległość od punktu $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ prostej o równaniu $Ax + By = C$. Znaleźć normalny układ równań tej prostej i zapisać dla niego oba wzory.
- (31) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^3)$ wyprowadzić wzory na odległość płaszczyzny o równaniu $Ax + By + Cz = D$ od początku układu współrzędnych i od punktu $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. Znaleźć normalny układ równań tej płaszczyzny i zapisać dla niego oba te wzory.
- Uwaga:** normalny układ równań złożony z jednego równania nazywamy **równaniem normalnym**.
- (32) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^n)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym dla podanych podprzestrzeni wyznaczyć dopełnienie ortogonalne przestrzeni kierunkowej, normalny układ równań, odległość od początku układu współrzędnych:
- (a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$; (b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$;
- (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$; (d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{lin} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$;
- (e) $af \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; (f) $af \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.
- (33) Znaleźć równanie normalne i równanie parametryczne prostej w przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym, przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i środek trójkąta, którego boki leżą na prostych o równaniach: $x - y = 4$, $2x - 11y = -37$, $2x + 7y = 17$. Obliczyć odległości prostych, zawierających boki trójkąta od początku układu współrzędnych.

(34) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym dana jest prosta L o równaniu $25x - 15y + 12 = 0$. Udowodnić, że w zbiorze $\{X \in E(\mathbb{R}^2) : \text{odległość } X \text{ od } L \text{ jest } \leq \frac{1}{30}\}$ nie ma punktów o obu współrzędnych całkowitych (wskazówka: $34 < 36$, więc $\sqrt{34} < 6$).

(35) W przestrzeni euklidesowej $E(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć sumę odległości punktu $P = aA + bB + cC$, gdzie $a + b + c = 1$, $a, b, c > 0$, od prostych $af(A, B)$, $af(A, C)$ i

$$af(B, C), \text{ jeśli } A = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(36) Wykazać, że w przestrzeni $E(\mathbb{R}^n)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym

(a) równanie hiperpłaszczyzny $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ jest normalne wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki a_i są sinusami kątów między hiperpłaszczyzną a półprostymi $\theta + \{x\varepsilon_i : x \geq 0\}$ odpowiednio;

(b) wektor kierunkowy prostej $P + \text{lin}(v)$ jest unormowany wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne są cosinusami kątów między tą prostą a półprostymi $\theta + \{x\varepsilon_i : x \geq 0\}$ (te współrzędne nazywamy **cosinusami kierunkowymi** prostej, a kąty - **kątami Eulera**)

(37) Obliczyć cosinusy kierunkowe prostej o równaniu ogólnym ("krawędziowym")

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$$

w przestrzeni $E(\mathbb{R}^5)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym.

(38) (**Równanie kanoniczne prostej**) Wykazać, że punkt $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ w przestrzeni $E(\mathbb{R}^n)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym leży na prostej $P + \text{lin}(v)$, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi proporcja:

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{v_n}.$$

Jeśli $q(v) = 1$, to ten układ równań nazywamy równaniem kanonicznym prostej $P + \text{lin}(v)$.

(39) Wyrazić kąt między wektorami α i $\tau_u \circ \tau_v(\alpha)$ na płaszczyźnie przez kąt między wektorami u i v .

(40) Wykazać, że

(a) odległość punktu Q od hiperpłaszczyzny o równaniu $\xi(\alpha, \overrightarrow{PX}) = a$ wyraża się wzorem $\frac{|\xi(\alpha, \overrightarrow{PQ}) - a|}{\sqrt{q(\alpha)}}$;

(b) jeśli podprzestrzeń A w przestrzeni $E(\mathbb{R}^n)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym ma ńlny układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases},$$

to odległość punktu $(c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ od A wyraża się wzorem $\sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j - b_i \right)^2}$.

- (41) W przestrzeni $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym dwa boki równoległoboku leżą na prostych $x + y = 1$, $3x - y = -4$, a przekątne przecinają się w punkcie $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Znaleźć równania prostych, na których leżą pozostałe dwa boki i obliczyć ich odległości od początku układu współrzędnych.
- (42) W przestrzeni euklidesowej dany jest trójkąt o wierzchołkach A, B, C .
- (a) Sprawdzić, że punkty A, B ,

$$D = A - \frac{1}{2} \left(1 + \xi \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} \right) \sqrt{\frac{3}{g_\xi \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} \right)}} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{q \left(\overrightarrow{AB} \right)}{2} \sqrt{\frac{3}{g_\xi \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} \right)}} \overrightarrow{CA}$$

są wierzchołkami trójkąta równobocznego i punkty C i D leżą na płaszczyźnie $af(A, B, C)$ po przeciwnych stronach prostej $af(A, B)$.

(b) Sprawdzić, że środki trójkątów równobocznych ABD, BCE, CAF zbudowanych na bokach trójkąta ABC tak, że ich wierzchołki D, E, F oraz punkty C, A, B odpowiednio leżą po przeciwnej stronie podstawy, tworzą trójkąt równoboczny.

(c) Sprawdzić, że środki trójkątów równobocznych ABD, BCE, CAF zbudowanych na bokach trójkąta ABC tak, że ich wierzchołki D, E, F oraz punkty C, A, B odpowiednio leżą po tej samej stronie podstawy, tworzą trójkąt równoboczny.

- (43) W przestrzeni euklidesowej punkty A, B, C, D są wierzchołkami kwadratu o boku a (tzn $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $q \left(\overrightarrow{AB} \right) = q \left(\overrightarrow{AD} \right) = a^2$). Sprawdzić, że dla punktu P płaszczyzny $af(A, B, C, D)$ warunki $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \theta$ i $P = \frac{1}{8}A + \frac{3}{8}B + \frac{3}{8}C + \frac{1}{8}D$ są równoważne. Obliczyć odległość punktu P określonego przez te warunki od środka kwadratu $ABCD$.
- (44) Obliczyć odległości $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ od podprzestrzeni $S_2(\mathbb{R})$ macierzy symetrycznych i podprzestrzeni $A_2(\mathbb{R})$ macierzy antysymetrycznych w przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$ macierzy kwadratowych stopnia 2 nad $\mathbb{R}$, w której forma kwadratowa wyraża się wzorem $q(A) = tr(A^\top \cdot A)$.
- (45) W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dany jest funkcjonał dwuliniowy ξ taki, że

$$q \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = a^2 x_1^2 + 2ax_1(x_2 + x_3 + x_4) + (b^2 + 1)x_2^2 + (4b + 2)x_2x_3 + (6b + 2)x_2x_4 \\ + (c^2 + 5)x_3^2 + (6c + 14)x_3x_4 + (d^2 + 19)x_4^2.$$

(a) Dla jakich wartości parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ przestrzeń $(\mathbb{R}^4, \xi)$ jest euklidesowa?

(b) Obliczyć odległość ε_4 od $\theta + \text{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

- (46) W afinicznej przestrzeni euklidesowej $E(\mathbb{R}^4)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć odległość punktu P od podprzestrzeni H :
- (a) $P = (2, 4, 0, -1)^\top$, $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top : 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$;
- (b) $P = (3, 3, -1, -1)^\top$, $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top : 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\}$.
- (47) Obliczyć odległość punktu $(0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$ od hiperpłaszczyzny $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_5 + 8x_6 = 11$ w przestrzeni $E(\mathbb{R}^6)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym.
- (48) Sprawdzić, że iloczyn odległości wierzchołka trójkąta od prostej przechodzącej przez pozostałe dwa wierzchołki i odległości między pozostałymi wierzchołkami nie zależy od wyboru wierzchołka.

Obliczyć te trzy iloczyny dla trójkąta o wierzchołkach $(2, 10, 18, 22, 14, 6)^\top$, $(4, 14, 20, 24, 12, 8)^\top$, $(0, 14, 24, 20, 12, 12)^\top$ w $E(\mathbb{R}^6)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym.

- (49) Obliczyć odległość między prostymi G i H w $E(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym, gdy G ma układ równań $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2z + z = 3 \end{cases}$, a H ma układ równań $x = y = z - 1$.

- (50) W przestrzeni euklidesowej $E(\mathbb{R}^3)$, w której $\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ obliczyć

odległość podprzestrzeni G, H określonych układami równań:

(a) $G : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}, H : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$

(b) $G : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}, H : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.

- (51) W $E(\mathbb{R}^n)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym obliczyć odległość G od H :

(a) $n = 3, G = af\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}\right), H = af\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}\right);$

(b) $n = 4, G = af\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}\right), H = af\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}\right);$

(c) $n = 4, G = af\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}\right), H = af\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

(d) $n = 6, G = af((-2, 4, 3, 6, 5, 8)^\top, (6, 4, 3, 6, 5, 8)^\top, (37, 13, -1, 10, 4, 9)^\top),$

$H = af((1, 2, 8, 4, 7, 6)^\top, (-2, 5, 10, x, 6, 6)^\top, (104, 83, -8, 20, 6, 7)^\top, (1, 32, 18, 14, 5, 4)^\top).$

W każdym z tych przypadków znaleźć $P \in G$ i $Q \in H$ dla których odległość P od Q jest równa odległości G od H .