

16 Klasyfikacja powierzchni euklidesowych

Definicja 16.1. Niech G będzie grupą, a X dowolnym zbiorem. **Działaniem grupy na zbiorze** nazywamy funkcję $\cdot : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ spełniającą warunki:

i. $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$,

ii. $e \cdot x = x$.

Przykłady:

- działanie trywialne,
- działanie grupy symetrii obiektu geometrycznego na jego zbiór punktów.

Definicja 16.2. Niech grupa G działa na zbiorze X . **Orbitą** elementu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Definicja 16.3. Grupa G działa właściwie nieciągłe na $\mathbb{E}^2$, jeśli dla każdego zwartego $K \subset \mathbb{E}^2$ zbiór

$$\{g \in G: g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

jest skończony.

Definicja 16.4. *Działanie jest wolne, jeśli $gx = x$ implikuje $g = e$.*

Uwaga 16.5. Niech grupa G działa na przestrzeń topologiczną X . Zdefiniujmy relację

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ i } y \text{ leżą w tej samej orbicie działania.}$$

Wówczas $\sim$ jest relacją równoważności. Przestrzeń $X/\sim$ oznaczamy przez X/G .

Przykłady:

- $G = \langle (x, y) \mapsto (x + 1, y) \rangle$, $\mathbb{E}^2 / G$ jest cylindrem,
- $G = \langle (x, y) \mapsto (x + 1, y), (x, y) \mapsto (x, y + 1) \rangle$, $\mathbb{E}^2 / G$ jest torusem,

Twierdzenie 16.6. *[Klasyfikacja] Każda spójna, zupełna powierzchnia euklidesowa jest izometryczna z ilorazem*

$$\mathbb{E}^2 / G,$$

gdzie G jest dyskretną, wolną podgrupą $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$.

Wniosek 16.7. *Jedynymi zwartymi powierzchniami euklidesowymi są:*

- *torus,*
- *butelka Kleina.*

Uwaga 16.8. Rozważmy punkt P na powierzchni. Niech dookoła punktu P porusza się mrówka uwiązana na krótkiej smyczy o długości r . Niech $C(r)$ oznacza długość pełnego obrotu dookoła P na napiętej smyczy. Wartość

$$K = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\pi r - C(r)}{\pi r^3} \right)$$

nazywamy **krzywizną Gaussa** w punkcie P .

Twierdzenie 16.9. (Killinga-Hopfa) *Każda zupełna, spójna powierzchnia o stałej krzywiznie Gaussa jest izometryczna z ilorazem $\mathbb{E}^2 / G$, gdzie G jest dyskretną grupą izometrii działającą wolnie i właściwie.*

Uwaga 16.10. Dla krzywizny dodatniej otrzymujemy sfery, dla ujemnej — powierzchnie hiperboliczne, dla zerowej — płaszczyznę.