

13 Izometrie płaszczyzny euklidesowej

Definicja 13.1. *Przestrzeń metryczna* to para (X, d) , $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Przykład:

- E^n – n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definicja 13.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Odwzorowanie $f: X \rightarrow X$ nazywamy **izometrią**, jeżeli

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in X.$$

Przykłady: Przykładami izometrii $\mathbb{E}^2$ są:

- przesunięcia $T_v(x) = x + v$,
- obroty wokół punktu p ,
- symetrie osiowe,
- symetrie z poślizgiem.

Twierdzenie 13.3. *Zbiór wszystkich izometrii $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ przestrzeni $\mathbb{E}^2$ jest grupą.*

Twierdzenie 13.4. *Każda izometria $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ ma postać*

$$f(x) = A x + b,$$

gdzie $A \in O(2)$ jest macierzą ortogonalną, a $b \in \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie 13.5. *Każda izometria płaszczyzny euklidesowej jest dokładnie jednym z typów:*

- 1. przesunięciem,*
- 2. obrotem,*
- 3. symetrią osiową,*
- 4. symetrią z poślizgiem.*

Twierdzenie 13.6. Dla izometrii $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ następujące warunki są równoważne:

1. f zachowuje orientację,
2. f jest złożeniem obrotów i przesunięć,
3. f zachowuje zwrot baz dodatnich.

Definicja 13.7. *Izometria $f(x) = Ax + b$ zachowuje orientację, jeżeli spełnia jeden (a zatem wszystkie) warunek poprzedniego twierdzenia.*

Definicja 13.8. Niech S będzie zbiorem.

- **Mapa** to para (U, φ) , gdzie $U \subset S$ oraz $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest homeomorfizmem
- **Atlas** to rodzina map $\{(U_i, \varphi_i)\}$ pokrywająca S .

Definicja 13.9. *Atlas jest euklidesowy, jeśli przejścia*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

są izometriami.

Definicja 13.10. *Przestrzeń metryczną nazywamy **powierzchnią euklidesową**, jeżeli istnieje dla niej atlas euklidesowy.*

Definicja 13.11. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $\sim$ relacją równoważności. Przestrzeń ilorazowa $X / \sim$ to zbiór klas równoważności z topologią ilorazową.

Przykład 13.12. • Cylinder: $\mathbb{R}^2 / \langle (x, y) \sim (x + 1, y) \rangle$.

- Torus: $\mathbb{R}^2 / \langle (x, y) \sim (x + 1, y), (x, y + 1) \rangle$.
- Wstęga Möbiusa: identyfikacja $(0, y) \sim (1, -y)$.

Definicja 13.13. Powierzchnia jest **lokalnie euklidesowa**, jeśli każdy punkt ma otoczenie izometryczne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$.

14 Powierzchnie euklidesowe

Definicja 14.1. Powierzchnią euklidesową nazywamy spójną, drugiej klasy Hausdorffa rozmaitość topologiczną S wymiaru 2, wyposażoną w atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$, gdzie:

- $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ są homeomorfizmami na obrazy,
- wszystkie przejścia $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ są izometriami płaszczyzny euklidesowej.

Uwaga 14.2. Taka struktura definiuje metrykę płaską na S oraz zerową krzywiznę Gaussa.

Przykład 14.3. • $\mathbb{E}^2$ — powierzchnia po prostu spójna,

- cylinder $S^1 \times \mathbb{R}$,
- torus płaski T^2 ,
- wstęga Möbiusa,
- butelka Kleina.

15 Grupa izometrii płaszczyzny

Definicja 15.1. Grupę wszystkich izometrii $\mathbb{E}^2$ oznaczamy przez $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$.

Twierdzenie 15.2. Każda izometria $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ ma postać

$$f(x) = A x + b,$$

gdzie $A \in O(2)$ oraz $b \in \mathbb{R}^2$.

Dowód. Izometria zachowuje odległości, a więc proste i równoległość, co implikuje afiniczność. Część liniowa zachowuje normę, stąd $A^T A = I$. □

Uwaga 15.3.

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^2) \cong O(2) \ltimes \mathbb{R}^2.$$