

Twierdzenie 11.7. *Elipsa jest miejscem geometrycznym punktów P , których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (niekoniecznie różnych) O, O' jest stała i równa $2a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $2a > OO'$.*

12 Powierzchnie stopnia 2.

Definicja 12.1. *Powierzchnią stopnia 2 nazywamy hiperpowierzchnię stopnia 2 w trójwymiarowej przestrzeni afinicznej E .*

Uwaga 12.2. Niech równanie powierzchni stopnia 2 względem pewnego układu ortonormalnego będzie równe

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0$$

Niech

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A & & b_2 \\ & & & b_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & c \end{array} \right] \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Niech $R = r(B)$, $r = r(A)$, $\Delta = \det B$, $\delta = \det A$. Wielomian charakterystyczny macierz A :

$$W_A(x) = x^3 + \delta_1 x^2 - \delta_2 x + \delta$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ \delta_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Przy przejściu do nowego układu ortonormalnego nie ulegają zmianie $R, r, \Delta, \delta, \delta_1, \delta_2$.

2. Przy pomnożeniu równania przez $d \neq 0$ zachodzą zmiany $A \mapsto dA$, $B \mapsto dB$, $\delta \mapsto d^3\delta$, $\Delta \mapsto d^4\Delta$, $\delta_1 \mapsto d\delta_1$, $\delta_2 \mapsto d^2\delta_2$.
3. Przy pomnożeniu równania przez $d \neq 0$ nie ulegają zmianie $R, r, \text{sgn } \Delta, \text{sgn } \delta_2, \text{sgn } \delta \cdot \delta_1$

Definicja 12.3. Niech E będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni euklidesowej E^n , $\mathcal{K} \subseteq E$. **Walcem** o podstawie $\mathcal{K}$ i tworzącej $S(E)^\perp$ nazywamy zbiór $\pi^{-1}(\mathcal{K})$, gdzie $\pi: E^n \rightarrow E$ jest rzutem prostopadłym przestrzeni E^n na podprzestrzeń E .

Uwaga 12.4. Niech $n = 3$, $\dim E = 2$, $\mathcal{K}$ będzie krzywą stopnia 2 w E . Niech (O, α_1, α_2) będzie układem ortonormalnym w E takim, że $(O, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jest układem ortonormalnym w E^3 .

Niech $\mathcal{K}$ ma względem układu (O, α_1, α_2) równanie

$$F(x, y) = 0, \quad F \in \mathbb{R}[x, y].$$

Wówczas $(x, y, z) \in \pi^{-1}(\mathcal{K}) \Leftrightarrow \pi(x, y, z) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow F(x, y) = 0$. Zatem równanie walca $\pi^{-1}(\mathcal{K})$ względem układu $(O, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jest postaci

$$F(x, y) = 0, \quad F \in \mathbb{R}[x, y, z].$$

Walcami w E^3 , których podstawami są stożkowe właściwe, są:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – walec eliptyczny,
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – walec hiperboliczny,
- $y^2 = 2px$ – walec eliptyczny.

Uwaga 12.5. (powierzchnie obrotowe) Niech E będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej E^3 , $\dim E = 2$, niech $L \subseteq E$ będzie prostą, niech $K \subseteq E$. Niech (O, α_1) będzie układem ortonormalnym w L , (O, α_1, α_2) – w E , zaś $(O, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – w E^3 .

Dokonujemy obrotu E^3 wokół L . Niech $P' = (x', y') \in E$ i niech $P = (x, y, z)$ będzie punktem otrzymanym z P' poprzez obrót o pewien kąt. Wówczas

$$x = x', \quad y'^2 = y^2 + z^2.$$

Założmy, że równanie K względem (O, α_1, α_2) ma postać

$$F(x', y') = 0$$

Równanie powierzchni obrotowej ma zatem postać

$$F\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0 \vee F\left(x, -\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

lub

$$F\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) \cdot F\left(x, -\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

Równanie $\mathcal{K}$	Równanie powierzchni obrotowej	Nazwa
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	elipsoida obrotowa
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$	hiperboloida obrotowa dwupowłokowa
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	hiperboloida obrotowa jednopowłokowa
$y^2 = 2px$	$y^2 + z^2 = 2px$	paraboloida obrotowa
$y - ax = 0$	$y^2 + z^2 - a^2x^2 = 0$	stożek obrotowy
$y = a$	$y^2 + z^2 = a^2$	walec obrotowy

Powierzchnie nieobrotowe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{elipsoida nieobrotowa}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{elipsoida urojona}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{hiperboloida jednowłokowa}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{paraboloida}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{stożek}$$

Pozostała

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{paraboloida hiperboliczna aka małpie siodło}$$

Definicja 12.6. *Kwadryką* nazywamy powierzchnię stopnia 2 taką, że $R = 4$.