

11 Krzywe stopnia 2.

Definicja 11.1. Punkt P hiperpowierzchni $\mathcal{H}$ nazywamy **punktem osobliwym** tej hiperpowierzchni, jeśli P jest środkiem tej hiperpowierzchni.

Uwaga 11.2. Niech hiperpowierzchnia $\mathcal{H}$ będzie dana równaniem

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^n b_j x_j + c = 0.$$

Oznaczmy

$$F_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 2(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) + 2b_i.$$

Wówczas równaniem środka hiperpowierzchni jest

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

zaś równaniem punktu osobliwego

$$\begin{cases} F(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ F_{x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Definicja 11.3. Jeśli punkt $P = (a_1, \dots, a_n)$ jest punktem nieosobliwym hiperpowierzchni $\mathcal{H}$ o równaniu

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

to **hiperpłaszczyznę styczną** do $\mathcal{H}$ w punkcie P nazywamy hiperpłaszczyznę o równaniu

$$\sum_{i=1}^n F_{x_i}(a_1, \dots, a_n)(x_i - a_i) = 0$$

Definicja 11.4. *Hiperpowierzchnię stopnia 2 w przestrzeni afinicznej wymiaru 2 nazywamy krzywą stopnia 2.*

Definicja 11.5. Krzywą stopnia 2, dla której $R(\mathcal{H}) = 3$ nazywamy **stożkową właściwą**. Pozostałe krzywe stopnia 2 nazywamy **stożkowymi niewłaściwymi**.

Uwaga 11.6. Niech dane będą prosta l w E^2 zwana **kierownicą**, punkt $O \in E^2$ zwany **ogniskiem** oraz liczba $e \in \mathbb{R}$, $e > 0$, zwana **mimośrodem**. Niech ponadto

$$S(O, l, e) = \{P \in E^2 \mid \rho(P, O) = e \cdot \rho(P, l)\}.$$

- i. Jeśli $e = 1$, to wybieramy układ bazowy ortonormalny tak, aby prosta l miała równanie $x = -\frac{p}{2}$, natomiast ognisko O miało współrzędne afiniczne względem tego układu równe $(\frac{p}{2}, 0)$. Miejsce geometryczne punktów, których odległość od kierownicy i ogniska są równe jest parabolą.
- ii. Jeśli $e \neq 1$, to niech $\varepsilon = \text{sgn}(1 - e)$ i wybieramy układ ortonormalny tak, aby prosta l miała równanie $x = \varepsilon \frac{d}{1 - e^2}$, natomiast ognisko O miało współrzędne afiniczne $(c, 0)$, gdzie $d = \rho(O, l)$.
 - a) Jeśli $e < 1$, to miejsce geometryczne punktów $S(O, l, e)$ jest elipsą.
 - b) Jeśli $e > 1$, to miejsce geometryczne punktów $S(O, l, e)$ jest hiperbolą.

Twierdzenie 11.7. *Elipsa jest miejscem geometrycznym punktów P , których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (niekoniecznie różnych) O, O' jest stała i równa $2a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $2a > OO'$.*