

10 Własności geometryczne hiperpowierzchni stopnia 2.

Definicja 10.1. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $P \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2. Punkt P nazywamy **środkiem hiperpowierzchni** $\mathcal{H}$ jeżeli

$$\forall \alpha \in S(E) \ P + \alpha \in \mathcal{H} \Leftrightarrow P - \alpha \in \mathcal{H}.$$

Uwaga 10.2. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $P \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2, która w pewnym układzie bazowym $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ma równanie

$$\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + c = 0, a_1, \dots, a_r \neq 0.$$

Wówczas P jest środkiem hiperpowierzchni $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne w tym układzie bazowym są postaci $\underbrace{0, \dots, 0}_r, s_{r+1}, \dots, s_n$.

Uwaga 10.3. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2, która w pewnym układzie bazowym $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ma równanie

$$\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + 2x_n = 0, a_1, \dots, a_r \neq 0, r < n.$$

Wówczas nie istnieje środek hiperpowierzchni $\mathcal{H}$.

Wniosek 10.4. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$ i niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0.$$

Wówczas zbiór środków powierzchni $\mathcal{H}$ jest zbiorem pustym albo podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E i jej równanie ma postać

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n = 0 \end{cases}$$

Wniosek 10.5. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$ i niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2. Wówczas istnieje dokładnie jeden środek hiperpowierzchni $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r(\mathcal{H}) = n$.

Definicja 10.6. *Hiperpowierzchnie, które mają dokładnie jeden środek, nazywamy **centralnymi**.*

Definicja 10.7. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$ i niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0.$$

Wektor $[c_1, \dots, c_n] \in S(E)$ nazywamy **kierunkiem asymptotycznym** powierzchni $\mathcal{H}$, jeżeli

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}c_i c_j = 0.$$

Uwaga 10.8. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2, a zatem niech w pewnym układzie bazowym będzie opisana jednym z 3 możliwych równań:

- i. $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0, 0 \leq s < r \leq n,$
- ii. $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0, 1 \leq s < r \leq n,$
- iii. $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + 2x_n = 0, 1 \leq s < r \leq n - 1.$

Wówczas:

1. nie istnieje układ bazowy, w którym $\mathcal{H}$ byłaby opisana równaniem ii. lub iii., jeżeli w pewnym układzie opisana jest równaniem i. (analogicznie dla ii. oraz iii.);
2. jeżeli $\mathcal{H}$ jest opisywana równaniami typu i., to występująca w nich liczba s jest we wszystkich równaniach taka sama; jeżeli $\mathcal{H}$ opisywana jest równaniem ii. lub iii., to dla każdych dwóch różnych takich równań występujące w nich liczby s są albo jednakowe, albo ich suma wynosi r .

Twierdzenie 10.9. (klasyfikacja krzywych stopnia 2 na płaszczyźnie) Niech $\mathcal{H}$ będzie krzywą stopnia 2 na płaszczyźnie. Wówczas w pewnym układzie bazowym:

1. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci

$$-x_1^2 + 1 = 0$$

i $\mathcal{H}$ jest **parą prostych równoległych**;

2. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci

$$-x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$$

i $\mathcal{H}$ jest **elipsą**;

3. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci

$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$$

i $\mathcal{H}$ jest **hiperbolą**;

4. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

i $\mathcal{H}$ jest **parą prostych przecinających się**;

5. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci

$$x_1^2 + x_2 = 0$$

i $\mathcal{H}$ jest **parabolą**.

Twierdzenie 10.10. (klasyfikacja hiperpowierzchni stopnia 2 w przestrzeni) Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni. Wówczas w pewnym układzie bazowym:

1. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $-x_1^2 + 1 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **parą płaszczyzn równoległych**;
2. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **walcem eliptycznym**;
3. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **walcem hiperbolicznym**;
4. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **elipsoidą**;
5. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **hiperboloidą jednopowłokową**;
6. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **hiperboloidą dwupowłokową**;
7. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 - x_2^2 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **parą płaszczyzn przecinających się**;
8. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **stożkiem eliptycznym**;
9. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 + x_3 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **walcem parabolicznym**;
10. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **paraboloidą eliptyczną**;
11. równanie $\mathcal{H}$ jest postaci $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ i $\mathcal{H}$ jest **paraboloidą hiperboliczną**.