

9 Hiperpowierzchnie stopnia drugiego.

Definicja 9.1. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, niech $O \in E$. **Hiperpowierzchnią stopnia 2** w przestrzeni afinicznej E nazywamy miejsce geometryczne $\mathcal{H}$ punktów $P = O + \alpha$, których wektor wodzący α spełnia równanie

$$a(\alpha, \alpha) + 2b(\alpha) + c = 0, \quad (9.1)$$

gdzie $a: S(E) \times S(E) \rightarrow k$ jest niezerowym funkcjonałem dwuliniowym i symetrycznym, $b: S(E) \rightarrow k$ jest funkcjonałem liniowym, zaś $c \in k$.

Uwaga 9.2. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $O \in E$ i niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem (9.1). Niech $\mathcal{U} = (O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie układem bazowym, a więc niech dla $P \in E$:

$$P = O + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n,$$

czyli niech $x_1, \dots, x_n$ będą współrzędnymi afinicznymi punktu P . Wówczas $P \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0, \quad (9.2)$$

gdzie $[a_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ jest macierzą a w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, oraz $[b_1, \dots, b_n]$ jest macierzą b w bazach $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ oraz (1) .

Uwaga 9.3. Tolerujemy hiperpowierzchnie urojone. Jeśli $\mathcal{H} = \emptyset$, to równanie (9.2) określa hiperpowierzchnię urojoną.

Uwaga 9.4. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $O \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem (9.2). Macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy **małą macierzą** hiperpowierzchni $\mathcal{H}$, zaś macierz

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ \hline b_1 & \dots & b_n & c \end{array} \right]$$

nazywamy **dużą macierzą** hiperpowierzchni $\mathcal{H}$. Wówczas $P \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[x_1, \dots, x_n, 1] B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (9.3)$$

Uwaga 9.5. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $O \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem (9.2) lub, równoważnie, (9.3). Niech $\mathcal{U} = (O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie układem bazowym, a więc niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni $S(E)$.

Niech $\mathcal{A}' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ będzie inną bazą $S(E)$ i niech $C = [c_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ będzie macierzą przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$, a więc niech dla dowolnego punktu $P \in E$ o współrzędnych $x_1, \dots, x_n$ w układzie bazowym $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ oraz $x'_1, \dots, x'_n$ w układzie bazowym $\mathcal{U}' = (O, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \text{ oraz } \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} C & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]}_C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Równanie (9.3) równoważnie zapisujemy

$$[x'_1, \dots, x'_n, 1] C^T B C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Niech A' oznacza małą macierz $\mathcal{H}$ względem układu $(O, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, zaś B' dużą macierz. Wówczas

$$B' = C^T B C = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & & & \vdots \\ & & & b_n \\ \hline b_1 & \dots & b_n & c \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & b'_1 \\ & & & \vdots \\ & & & b'_n \\ \hline b'_1 & \dots & b'_n & c' \end{array} \right],$$

gdzie

$$A' = C^T A C, \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, c' = c.$$

Uwaga 9.6. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $O \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem (9.2) lub, równoważnie, (9.3). Niech $\mathcal{U} = (O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie układem bazowym, a więc niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni $S(E)$.

Niech $O' \in E$, i niech, dla dowolnego punktu $P \in E$, $x_1, \dots, x_n$ oznaczają jego współrzędne w układzie bazowym $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ oraz $x'_1, \dots, x'_n$ w układzie bazowym $\mathcal{U}' = (O', \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Wówczas

$$P = O + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}, \text{ dla } \alpha \in S(E).$$

Niech $\overrightarrow{OO'} = d_1\alpha_1 + \dots + d_n\alpha_n$. W szczególności

$$x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = (d_1 + x'_1)\alpha_1 + \dots + (d_n + x'_n)\alpha_n,$$

a więc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 + d_1 \\ \vdots \\ x'_n + d_n \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & d_1 \\ & \vdots & \\ I_n & & d_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Równanie (9.3) równoważnie zapisujemy

$$[x'_1, \dots, x'_n, 1] \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Niech A' oznacza małą macierz $\mathcal{H}$ względem układu $(O', \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, zaś B' dużą macierz. Wówczas

$$B' = \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|c} I_n & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline d_1 & \dots & d_n & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ \hline b_1 & \dots & b_n & c \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_n & \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A' & & & \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} \\ \hline b'_1 & \dots & b'_n & c' \end{array} \right],$$

gdzie

$$A' = A, \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, c' = [d_1, \dots, d_n] A \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} + 2[d_1, \dots, d_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.7. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $O \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem (9.2) lub, równoważnie, (9.3). Z hiperpowierzchnią $\mathcal{H}$ wiążemy następujące wielkości:

- małą macierz A ,
- dużą macierz B ,
- mały rząd $r(A)$,
- duży rząd $r(B)$,
- mały wyznacznik $\det A$,
- duży wyznacznik $\det B$,
- wielomian charakterystyczny $W_A(x) = \det(A - xI_n)$.

Zmiany powyższych wielkości przy zmianach układu bazowego $\mathcal{U}$ na $\mathcal{U}'$ zestawione są w poniższej tabeli:

wielkość	przesunięcie $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow (O', \alpha_1, \dots, \alpha_n)$	zmiana bazy $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow (O, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$
A	A	$C^T A C$
$r(A)$	$r(A)$	$r(A)$
$\det A$	$\det A$	$\det A \cdot (\det C)^2$
B	$P^T B P$	$C^T B C$
$r(B)$	$r(B)$	$r(B)$
$\det B$	$\det B$	$\det B \cdot (\det C)^2$
$W_A(x)$	$W_A(x)$	$W_A(x)$ o ile $C^T = C^{-1}$

Uwaga 9.8. Niech E będzie n – wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, $O \in E$. Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 zadaną równaniem (9.2) lub, równoważnie, (9.3). Niech $\mathcal{U} = (O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie układem bazowym, a więc niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni $S(E)$.

Jeżeli pomnożymy równanie (9.2) przez skalar $d \neq 0$, to powyższe wielkości zmieniają się następująco:

Wielkość	Zmiana
A	dA
B	dB
$r(A)$	$r(A)$
$r(B)$	$r(B)$
$\det A$	$d^n \det A$
$\det B$	$d^{n+1} \det B$
$W_A(x)$	$d^n W_A\left(\frac{x}{d}\right)$
wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy A	$d\lambda_1, \dots, d\lambda_n$

Uwaga 9.9. Jedyne wartości, które przy żadnej z powyższych operacji nie ulegają zmianie, to $r(A)$ i $r(B)$, które odtąd oznaczać będziemy, odpowiednio, $r(\mathcal{H})$ i $R(\mathcal{H})$.

Twierdzenie 9.10.

A (wersja afiniczna). Jeżeli $\mathcal{H}$ jest hiperpowierzchnią stopnia 2 w n – wymiarowej przestrzeni afinicznej E nad ciałem k oraz $r = r(\mathcal{H})$, to istnieje układ bazowy $\mathcal{U} = (O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni afinicznej E taki, że względem tego układu hiperpowierzchnia $\mathcal{H}$ ma równanie postaci

$$\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + c = 0, \quad a_1, \dots, a_r \neq 0,$$

lub

$$\sum_{i=1}^r a_i x_i^2 + 2x_n = 0, \quad r < n, a_1, \dots, a_r \neq 0.$$

Jeśli $k = \mathbb{C}$, to można założyć, że $a_1 = \dots = a_r = 1$ oraz $c \in \{0, 1\}$.

Jeśli $k = \mathbb{R}$, to można założyć, że $a_1, \dots, a_r \in \{-1, 1\}$ oraz $c \in \{0, 1\}$.

E (wersja euklidesowa). Jeżeli $\mathcal{H}$ jest hiperpowierzchnią w n – wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n , $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ są niezerowymi wartościami własnymi macierzy A oraz $r = r(\mathcal{H})$, to istnieje układ bazowy ortonormalny względem którego $\mathcal{H}$ ma równanie postaci

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c = 0$$

lub

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 - 2\mu x_n = 0, \quad r < n, \mu \neq 0.$$