

Zestaw 9

Ze względów redakcyjnych w większości zadań punkty przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$ i wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ są zapisywane w notacji wierszowej.

1. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ znaleźć:
 - (a) równanie parametryczne prostej $L = \text{Sol}(X - 2Y = 1)$,
 - (b) równanie ogólne prostej $L = (1, -1) + \text{lin}([3, -5])$,
 - (c) równanie ogólne i parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (2, -5)$, $Q = (-1, 0)$.
2. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej L , gdzie:
 - (a) $P = (1, -3)$, $L = (1, 2) + \text{lin}([1, -1])$,
 - (b) $P = (1, -1)$, $L = \text{Sol}(X + 2Y = 1)$,
 - (c) $P = (-1, -3)$, $L = \text{af}((1, -2), (1, 1))$.
3. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ znaleźć równania boków trójkąta o wierzchołkach: $A = (1, -1)$, $B = (3, 5)$, $C = (-1, 11)$.
4. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ punkty $(2, 1)$, $(2, 5)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Znaleźć trzeci wierzchołek.
5. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ wyznaczyć długości boków i miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC , jeśli: $A = (2, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (1, 2)$;
6. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ dane są równania dwóch boków równoległoboku: $8X + 3Y + 1 = 0$, $2X + Y - 1 = 0$ i równanie jednej z jego przekątnych $3X + 2Y + 3 = 0$. Znaleźć wierzchołki tego równoległoboku.
7. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ dane są dwa boki równoległoboku: $2X - Y = 0$, $X - 3Y = 0$ i punkt przecięcia się przekątnych $P = (2, 3)$. Znaleźć równania przekątnych.
8. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ znaleźć taki punkt, że jego odległości od punktów $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(-1, 0)$ są równe.
9. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ przez punkt $A = (2, 1)$ poprowadzić prostą tak, by punkt A był środkiem odcinka zawartego między prostymi $2X + Y = 0$, $X - Y - 2 = 0$.
10. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ dane są wierzchołki trójkąta $A = (1, 1)$, $B = (3, 5)$, $C = (-1, 3)$. Napisać równanie prostej przechodzącej przez środek boku AB i równoległej do boku BC .
11. Dla jakich wartości parametrów a , b proste $aX - 4Y + b = 0$, $4X - aY + 1 = 0$ w przestrzeni $\mathbb{E}^2$ (a) są równoległe, (b) pokrywają się.
12. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (2, 4)$ i prostopadłej do prostej $2X + Y - 2 = 0$.
13. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ znaleźć na prostej $4X + 3Y - 12 = 0$ punkt równoodległy od punktów $(-1, -2)$, $(1, 4)$.
14. W przestrzeni $\mathbb{E}^2$ dwa boki równoległoboku leżą na prostych $X + Y = 1$, $3X - Y = 4$, a przekątne przecinają się w punkcie $(3, 3)$. Znaleźć równania prostych na których leżą dwa pozostałe boki tego równoległoboku.
15. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć:
 - (a) równanie parametryczne płaszczyzny $L = \text{Sol}(X - 2Y - Z = 1)$,
 - (b) równanie ogólne płaszczyzny $L = (1, -1, 2) + \text{lin}([3, -5, 0], [1, 2, -1])$,
 - (c) równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = (2, -5, 1)$, $Q = (-1, 0, 3)$, $R = (1, 1, 0)$.
 - (d) równanie parametryczne prostej $L = \text{Sol}\left(\begin{cases} X - 2Y - Z = 1 \\ 2X - 3Z = 2 \end{cases}\right)$,
 - (e) równanie ogólne prostej $L = (1, -1, 2) + \text{lin}([3, -5, 1])$,
 - (f) równanie ogólne i parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (2, -5, 1)$, $Q = (-1, 0, 2)$.
16. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie ogólne płaszczyzny $H = (1, -1, 1) + \text{lin}([1, 2, 0], [2, 1, -1])$.
17. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie ogólne płaszczyzny $H = \text{af}((1, 0, 1), (2, -1, 2), (3, -2, 3))$.
18. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie ogólne prostej (a) $(1, -1, 1) + \text{lin}([2, 1, -1])$,
(b) $(-2, -1, 0) + \text{lin}([3, 0, -1])$, (c) $(5, -1, 1) + \text{lin}([0, 2, 0])$, (d) $\text{af}((0, -1, 2), (1, 3, 2))$.
19. Znajdź równanie ogólne każdej z następujących podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{E}^3$: (a) $\text{af}((0, 1, 0), (1, 1, 1))$,
(b) $\text{af}((0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0))$, (c) $(1, 0, 0) + \text{lin}([1, 0, 1])$, (d) $(1, 0, 0) + \text{lin}([1, 0, 1], [0, 1, 0])$.
20. Znajdź równanie parametryczne każdej z następujących podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{E}^3$:
(a) $\text{af}((0, 1, 0), (1, 1, 1))$, (b) $\text{af}((0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0))$, (c) $\text{Sol}(X_1 + X_2 = 1)$
(d) $\text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 - X_2 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}\right)$.

21. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znajdź równanie kanoniczne prostej (a) $\text{af}((1, 1, 3), (2, 2, 5))$,
 (b) $(1, 0, 0) + \text{lin}([1, 0, -1])$, (c) $\text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 - X_2 = 1 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}\right)$.
22. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$ płaszczyzna $H_1 = \text{Sol}(aX + Y - Z = 1)$ jest równoległa do płaszczyzny (a) $H_2 = \text{Sol}(aX + 2Y - 2Z = 2)$, (b) $H_2 = \text{Sol}(aX + 2Y - Z = 1)$.
23. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ sprawdź, czy prosta $L = (-2, 0, 1) + \text{lin}([1, -1, 3])$ jest równoległa do prostej
 (a) $\text{af}((0, 1, -1), (2, -1, 5))$, (b) $\frac{X-1}{2} = \frac{Y}{-1} = \frac{Z-2}{3}$.
24. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ sprawdź, czy prosta (a) $\frac{X-1}{2} = \frac{Y}{-1} = \frac{Z-2}{3}$, (b) $\text{af}((1, 0, 2), (2, 1, 3))$ jest równoległa do płaszczyzny $H = \text{Sol}(2X + Y - Z = 1)$.
25. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny H , gdzie:
 (a) $P = (1, -3, 1)$, $H = (1, 2, 0) + \text{lin}([1, -1, 1], [1, 0, 3])$,
 (b) $P = (1, -1)$, $H = \text{Sol}(X + 2Y - Z = 1)$,
 (c) $P = (-1, -3, 1)$, $H = \text{af}((1, -2, 0), (1, 0, 1), (2, -1, 1))$.
26. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej L , gdzie:
 (a) $P = (1, -3, 1)$, $L = (1, 2, 0) + \text{lin}([1, -1, 1])$,
 (b) $P = (1, -1)$, $L = \text{Sol}\left(\begin{cases} X + 2Y - Z = 1 \\ 2X + Z = 0 \end{cases}\right)$,
 (c) $P = (-1, -3, 1)$, $L = \text{af}((1, -2, 0), (2, -1, 1))$.
27. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostych L_1 i L_2 , gdzie:
 (a) $P = (1, 0, 1)$, $L_1 = (1, 2, 0) + \text{lin}([1, -1, 2])$, $L_2 = \text{af}((1, 0, 0), (2, 3, -1))$,
 (b) $P = (-1, 2, 1)$, $L_1 = \text{Sol}\left(\begin{cases} X + 2Y - Z = 1 \\ 2X + Z = 0 \end{cases}\right)$, $L_2 : \frac{X-1}{2} = \frac{Y}{-1} = \frac{Z-2}{3}$.
28. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ zbadać wzajemne położenie prostych L_1 i L_2 i wyznaczyć odległość pomiędzy tymi prostymi, gdzie:
 (a) $L_1 = ((1, 0, 1) + \text{lin}([1, 2, -1]))$, $L_2 : \frac{X-1}{2} = \frac{Y}{-1} = \frac{Z-2}{3}$,
 (b) $L_1 : \frac{X-2}{1} = \frac{Y+1}{-1} = \frac{Z-2}{3}$, $L_2 : \frac{X-3}{2} = \frac{Y+2}{1} = \frac{Z-5}{3}$,
 (c) $L_1 = ((1, 0, 1) + \text{lin}([0, 1, -1]))$, $L_2 = \text{af}((1, 1, 0), (2, -1, 1))$.
29. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ zbadać wzajemne położenie
 (a) płaszczyzn $H_1 = \text{af}((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$, $H_2 = \text{Sol}(X_2 = 2)$,
 (b) prostych $L_1 = \text{af}((1, 1, 1), (2, 1, 1))$, $L_2 = (1, 2, 1) + \text{lin}([1, 1, 1])$,
 (c) prostej $L = (1, 2, 1) + \text{lin}([1, 1, 1])$ i płaszczyzny $H = \text{Sol}(X_1 - X_3 = 5)$.
30. W przestrzeni $\mathbb{E}^3$ przez punkt P poprowadzić prostą przecinającą proste L_1 i L_2 , jeżeli
 (a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$, $L_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,
 (b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $L_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,
 (c) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L_1 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$, $L_2 : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$.
31. W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ wyznaczyć:
 (a) odległość punktu $(1, 0, 1)$ od prostej $\text{af}((-1, 2, 1), (1, 5, 7))$,
 (b) odległość punktu $(1, 1, 1)$ od płaszczyzny $\text{af}((-1, 2, 0), (-2, 5, -1), (0, 3, -3))$,
 (c) odległość pomiędzy każdą parą spośród prostych $\frac{X-2}{1} = \frac{Y+1}{-1} = \frac{Z-2}{3}$, $X = Y = Z$,
 $\frac{X}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-2}{-1}$.

- 32.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ wyznacz miarę kąta:
- (a) pomiędzy prostymi $\text{af}((1, 2, -4), (4, 0, -10))$ oraz $\text{af}((2, 6, -2), (-2, 6, 8))$;
 - (b) pomiędzy prostymi $L_1 = \text{Sol}\left(\begin{cases} 3X - 4Y - 2Z = 0 \\ 2X + Y - 2Z = 0 \end{cases}\right)$ oraz $L_2 = \text{Sol}\left(\begin{cases} 4X + Y - 6Z = 2 \\ Y - 3Z = -2 \end{cases}\right)$;
 - (c) pomiędzy prostą $\text{af}((5, 1, 2), (11, -2, 3))$ a płaszczyzną $\text{Sol}(7X + 2Y - 3Z = -5)$;
 - (d) pomiędzy prostą $\text{Sol}\left(\begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ 2X - 3Y + Z = 0 \end{cases}\right)$, a płaszczyzną $\text{af}((1, -1, 0), (-2, 0, -1), (-1, 1, 1))$;
 - (e) pomiędzy płaszczyznami $\text{Sol}(X - \sqrt{2}Y + Z = 1)$ oraz $\text{Sol}(X + \sqrt{2}Y - Z = 3)$;
 - (f) pomiędzy każdą parą spośród płaszczyzn $\text{af}((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0))$, $\text{af}((2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 0))$, $\text{af}((-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$.
- 33.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ obliczyć odległość prostej $G = \text{af}((7, 8, 9), (8, 8, 10))$, od prostej $H = \text{af}((9, 7, 7), (10, 9, 7))$.
- 34.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A = (2, -1, 1)$ i prostopadłej do prostej
- $$\begin{cases} X - 2Y + Z - 3 = 0 \\ X + Y - Z + 2 = 0 \end{cases}.$$
- 35.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ dane są trzy punkty $A = (4, 1, -2)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (-2, 3, 8)$. Znaleźć równanie kanoniczne prostej przechodzącej przez punkt B i przecinającej prostą AC pod kątem prostym.
- 36.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie kanoniczne prostej przecinającej proste $\text{af}((1, 1, 2), (2, 3, 3))$, $\text{af}((0, 1, 9), (2, 2, 10))$ pod kątem prostym.
- 37.** W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ znaleźć równanie kanoniczne prostej przechodzącej przez punkt $A = (1, 1, 1)$, przecinającej prostą $\text{af}((0, 0, 0), (1, 2, 3))$ i prostopadłą do prostej $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-2}{1} = \frac{Z-3}{4}$.