

Zestaw 8

1. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ znajdź ortogonalne dopełnienie:
 - (a) wektora $[1, 2, 0]$,
 - (b) podprzestrzeni $\text{lin}([1, 1, 1])$,
 - (c) podprzestrzeni $\text{Sol}(X - Z = 0)$,
 - (d) podprzestrzeni $\text{Sol}\left(\begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ 2X - Z = 0 \end{cases}\right)$.
2. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ znajdź ortogonalne dopełnienie:
 - (a) wektora $[1, 2, 0, 1]$,
 - (b) podprzestrzeni $\text{lin}([1, 1, 1, -1], [1, -1, 0, 1])$,
 - (c) podprzestrzeni $\text{Sol}(X_1 - X_2 + X_4 = 0)$,
 - (d) podprzestrzeni $\text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_3 = 0 \end{cases}\right)$,
 - (d) podprzestrzeni $\text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + Y_2 + X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases}\right)$.
3. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ każdy z wektorów $[1, 1, 1]$, $[1, 0, -1]$ przedstaw jako sumę wektora równoległego i wektora prostopadłego do podprzestrzeni:
 - (a) $W = \text{lin}([1, -1, 1])$,
 - (b) $W = \text{lin}([1, 1, 0], [0, 1, 1])$,
 - (c) $W = \text{Sol}(X_1 - 2X_2 + X_3 = 0)$.
4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ każdy z wektorów $[1, 1, 1, 1]$, $[1, 0, 0, 0]$ przedstaw jako sumę wektora równoległego i wektora prostopadłego do podprzestrzeni:
 - (a) $W = \text{lin}([1, 0, 1, 1])$,
 - (b) $W = \text{lin}([1, 1, -2, 0], [0, 1, 1, -2])$,
 - (c) $W = \text{Sol}(X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 0)$.
5. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ znajdź bazę ortonormalną:
 - (a) płaszczyzny $\text{Sol}(X - Y + Z = 0)$,
 - (b) płaszczyzny $\text{lin}([1, 2, 0], [0, 1, -1])$,
 - (c) ortogonalnego uzupełnienia wektora $[2, 1, 1]$.
6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ znajdź bazę prostopadłą:
 - (a) hiperpłaszczyzny $\text{Sol}(X - Y + Z - T = 0)$,
 - (b) płaszczyzny $\text{lin}([1, 2, 0, -1], [0, 1, -1, 1])$,
 - (c) ortogonalnego uzupełnienia wektora $[2, 1, 1, 2]$.
7. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ oblicz:
 - (a) miarę kąta pomiędzy wektorami $\mathbf{v} = [1, 1, -1]$, $\mathbf{w} = [0, 1, 2]$,
 - (b) miarę kąta pomiędzy wektorem $\mathbf{v} = [1, 1, -1]$ a płaszczyzną $W = \text{lin}([1, 1, 0], [2, 1, 1])$,
 - (c) miarę kąta pomiędzy płaszczyznami $W_1 = \text{Sol}(X + Y - Z = 1)$, $W_2 = \text{lin}([1, -1, 0], [2, 1, -1])$,
 - (d) miarę kąta pomiędzy prostymi $U_1 = \text{Sol}\left(\begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ 2X - Z = 0 \end{cases}\right)$, $U_2 = \text{lin}([1, -1, 0], [2, 1, -1])$.
8. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ dane są wektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ o długościach równych odpowiednio 5, 8 i takie, że $|\angle\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}| = \frac{\pi}{3}$. Znajdź długości wektorów $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ oraz $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.
9. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ oblicz 4-wymiarową miarę równoległościanu rozpiętego na wektorach:
 - (a) $[1, -1, 1, -1]$, $[1, 1, 1, 1]$, $[1, 0, -1, 0]$, $[0, 1, 0, -1]$;
 - (b) $[1, 1, 1, 1]$, $[1, -1, -1, 1]$, $[2, 1, 1, 3]$, $[0, 1, -1, 0]$.
10. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ oblicz 5-wymiarową miarę równoległościanu rozpiętego na wektorach:
 - (a) $[1, 1, 1, 2, 1]$, $[1, 0, 0, 1, -2]$, $[2, 1, -1, 0, 2]$, $[0, 7, 3, -4, -2]$, $[39, -37, 51, -29, 5]$;
 - (b) $[1, 0, 0, 2, 5]$, $[0, 1, 0, 3, 4]$, $[0, 0, 1, 4, 7]$, $[2, -3, 4, 11, 12]$, $[0, 0, 0, 0, 1]$.
11. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ znajdź wzory określające symetrię prostopadłą względem podprzestrzeni W oraz rzut prostopadły na podprzestrzeń W , jeśli
 - (a) $W = \text{Sol}(X + 3Y - Z = 0)$,

- (b) $W = \text{lin}([1, 0, 1])$,
 (c) $W = (\text{Sol}(2X + Y - Z = 0))^\perp$.
 (d) $W = [1, -1, 0]^\perp$.
12. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$
- (a) Znajdź obraz wektora $[1, 0, 1]$ w rzucie prostopadłym na podprzestrzeń $U = \text{lin}([1, -1, 0], [0, 1, 2])$ oraz znajdź obraz tego wektora w symetrii prostopadłej względem podprzestrzeni U .
 (b) Znajdź wzory określające rzut prostopadły na prostą L i symetrię prostopadłą względem prostej L , jeśli $L = \text{lin}([1, 1, 0])$.
 (c) Znajdź wzór określający symetrię prostopadłą względem prostej $\text{Sol}\left(\begin{cases} X + 2Y - Z = 0 \\ 2X + Y = 0 \end{cases}\right)$.
13. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ znajdź wzory określające symetrię prostopadłą względem płaszczyzny W oraz rzut prostopadły na płaszczyznę W , jeśli $W = \text{Sol}(X + 3Y - Z = 0)$.
14. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ znajdź wzór określający symetrię hiperpłaszczyznową $\tau_{\mathbf{u}}$, gdzie $\mathbf{u} = [1, -1, 0]$.
15. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ znajdź wzór określający symetrię hiperpłaszczyznową $\tau_{\mathbf{u}}$, gdzie $\mathbf{u} = [1, -1, 0, 1]$.
16. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ oblicz iloczyny wektorowe: $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$,
 $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_2$, $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1$.
17. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ oblicz iloczyny wektorowe: $[1, 1, 0, 0] \times [-1, 0, 1, 1] \times [0, 1, 2, 1]$, $[1, 1, 1, 1] \times [-1, 0, 0, 1] \times [0, 1, 1, 0]$.