

Zestaw 7

1. Obliczyć rząd wierszowy i rząd kolumnowy macierzy

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

2. Obliczyć rzędy następujących macierzy zespolonych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}.$$

3. Znaleźć układ fundamentalny (bazę) przestrzeni rozwiązań układu równań o n -niewiadomych nad ciałem K :

$$(a) \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases}, \quad n = 4, \quad K = \mathbb{Q}; \quad (b) \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases}, \quad n = 7, \quad K = \mathbb{Q};$$

$$(c) \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 - 3X_5 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 - 3X_5 = 0 \end{cases}, \quad n = 5, \quad K = \mathbb{Z}_3; \quad (d) \quad X_4 = 0, \quad n = 4, \quad K = \mathbb{R};$$

$$(e) \quad X_1 = X_2, \quad n = 4, \quad K = \mathbb{R}.$$

4. Przy pomocy rzędu, w zależności od parametru a wyznaczyć wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań liniowych o n niewiadomych nad ciałem K .

$$(a) \begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + aX_3 = 0 \end{cases}, \quad n = 3, \quad K = \mathbb{Z}_3; \quad (b) \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0 \\ 4X_1 + aX_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases}, \quad n = 4, \quad K = \mathbb{Z}_5.$$

5. Przy pomocy rzędu, w zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_7$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni rozwiązań układów równań:

$$(a) \begin{cases} 2x + 2y + az + t = 0 \\ x + y + 6z + at = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x + ay + 4z + 3t = 0 \\ ay + 3z + t = 0 \end{cases}.$$

6. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań. Przedstawić zbiór rozwiązań każdego układu niesprzecznego w postaci warstwy w odpowiedniej przestrzeni oraz znaleźć układ fundamentalny rozwiązań.

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}; \quad (c) \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases}.$$

7. Rozwiązać układy równań z poprzedniego zadania metodą Cramera.

8. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$ następujące układy równań. Przedstawić zbiór rozwiązań każdego układu niesprzecznego w postaci warstwy w odpowiedniej przestrzeni oraz znaleźć układ fundamentalny rozwiązań.

$$(a) \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}, \quad p = 11; \quad (b) \begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}, \quad p = 13;$$

9. Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$. Przedstawić zbiór rozwiązań każdego układu niesprzecznego w postaci warstwy w odpowiedniej przestrzeni oraz znaleźć układ fundamentalny rozwiązań.

$$(a) \begin{cases} x + 4y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 4x + 3z = 2 \end{cases}.$$

10. Rozwiązać metodą Cramera następujące układy równań:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 11 \\ 3x - 2y + z = -1 \end{cases}, & \text{(b)} \quad \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = -2 \\ 4x + y + 3z = -4 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad \begin{cases} x + y + 4z + t = 0 \\ 5x + y + 2z + t = 0 \\ 3x - y + z + t = 0 \end{cases}, & \text{(d)} \quad \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 0 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ 2x + 3y - z - t = 0 \\ x + 2y + 3z - t = 0 \end{cases}.
 \end{array}$$

11. Przy pomocy rzędu, sprawdź, czy wektor α należy do podprzestrzeni przestrzeni K^3 rozpiętej na wektorach α_1, α_2 , jeżeli

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad K = \mathbb{Q}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \\
 \text{(b)} \quad K = \mathbb{Z}_5, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}. \\
 \text{(c)} \quad K = \mathbb{Z}_7, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

12. Przy pomocy rzędu, wyznacz wymiar podprzestrzeni przestrzeni $(\mathbb{Z}_5)^3$ rozpiętej na wektorach

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

13. Przy pomocy rzędu, sprawdź, czy układ $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $(\mathbb{Z}_5)^3$ jest liniowo niezależny:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \mathcal{A} = ([2, 1, 3], [3, 4, 3], [1, 0, 1]), \\
 \text{(b)} \quad \mathcal{A} = ([4, 2, 3], [0, 1, 1], [1, 0, 4]).
 \end{array}$$

14. Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{Z}_5$, którego zbiorem rozwiązań jest podprzestrzeń:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \text{lin}([1, 3, 1], [1, 3, 4], [4, 2, 0]), \\
 \text{(b)} \quad \text{lin}([3, 1, 2], [1, 1, 1], [2, 3, 0], [3, 0, 4]).
 \end{array}$$

15. Znaleźć układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego zbiorem rozwiązań jest:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}\right), & \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \\
 \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), & \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right).
 \end{array}$$