

Zestaw 6

- W przestrzeniach liniowych $\mathbb{R}^2$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^2$ oblicz:
(a) $[1, 2] + [1, 5]$, (b) $4[1, 3]$, (c) $-[4, 3]$, (d) $[2, 0] - [3, 1]$.
- W przestrzeniach wektorowych $\mathbb{R}^2$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^2$ rozwiąż równanie:
(a) $\mathbf{x} + [5, 4] = [3, 1]$, (b) $[2, 6] - \mathbf{x} = [1, 0]$, (c) $5\mathbf{x} = [5, 2]$, (d) $4\mathbf{x} = [6, 1]$.
- W przestrzeniach wektorowych $\mathbb{R}^3$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^3$ oblicz:
(a) $[7, 1, 8] + [1, 6, 0]$, (b) $5[1, -1, 0]$, (c) $-[1, 0, 4]$, (d) $[1, 3, 0] - [1, 5, -1]$, (e) $5[9, 3, 1] - 7[5, 1, 0]$.
- W przestrzeniach wektorowych $\mathbb{R}^3$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^3$ rozwiąż równanie:
(a) $\mathbf{x} + [7, 2, 0] = [8, 7, 5]$, (b) $[9, 6, 3] - \mathbf{x} = [5, 1, 7]$, (c) $3\mathbf{x} = [9, -12, 0]$, (d) $4\mathbf{x} + [1, 1, 6] = [5, 13, 6]$.
- Niech K będzie ciałem. Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
(a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$,
(b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$,
(c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,
(d) $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0\}$,
(e) $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0 \text{ i } 2x + y = 0\}$,
(f) $U = \{[x, y, z, t] : xy = 0\}$,
(g) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.
- Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
(a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\}$,
(b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
(c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.
- Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni $(\mathbb{Z}_3)^2$ są podprzestrzeniami liniowymi:
(a) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 1]\}$,
(b) $U = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$,
(c) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 2]\}$.
- Jakiej postaci są wektory należące do warstwy $[1, 1] + W$, gdzie $W = \{[u, u + t] : u, t \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2$.
- Dana jest podprzestrzeń $U = \text{Sol}(X - Y = 0)$ przestrzeni $(\mathbb{Z}_3)^2$. Wypisz wszystkie wektory należące do warstwy $[1, 2] + U$.
- W przestrzeniach wektorowych $\mathbb{R}^n$ oraz $(\mathbb{Z}_5)^2$ wyznacz kombinację liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ o współczynnikach odpowiednio a_1, a_2, a_3 , gdzie:
(a) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [-2, 3]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2]$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$,
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 0]$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.
- Sprawdź czy wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ w przestrzeniach wektorowych $\mathbb{R}^n$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^n$, jeśli:
(a) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, -1]$;
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 0]$, $\mathbf{w} = [1, 1, 2]$.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie:
(a) $\mathbf{v}_1 = [2, 3, 5]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 7, 8]$, $\mathbf{v}_3 = [1, -6, 1]$, $\mathbf{w} = [7, -2, a]$;
(b) $\mathbf{v}_1 = [4, 4, 3]$, $\mathbf{v}_2 = [7, 2, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [4, 1, 6]$, $\mathbf{w} = [5, 9, a]$;
(c) $\mathbf{v}_1 = [3, 2, 5]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 4, 7]$, $\mathbf{v}_3 = [5, 6, a]$, $\mathbf{w} = [1, 3, 5]$;
(d) $\mathbf{v}_1 = [3, 2, 6]$, $\mathbf{v}_2 = [5, 1, 3]$, $\mathbf{v}_3 = [7, 3, 9]$, $\mathbf{w} = [a, 2, 5]$.
- Sprawdź czy w przestrzeniach wektorowych $\mathbb{R}^3$ oraz $(\mathbb{Z}_5)^3$ prawdziwa jest przynależność:
(a) $[4, 9, 9] \in \text{lin}([-8, -18, 18])$,
(b) $[2, 5, 3] \in \text{lin}([1, 3, 0], [0, 8, 1])$,
(c) $[3, 1, 5] \in \text{lin}([1, 4, 8], [1, 5, -5], [1, 6, 0])$.
- Sprawdź czy dane wektory rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^2$:
(a) $[1, 3]$, $[1, 4]$, (b) $[1, 2]$, $[7, 6]$, (c) $[1, 2]$, $[5, 1]$, $[9, 0]$.
- Sprawdź czy dane wektory rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^3$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^3$:
(a) $[1, 2, 2]$, $[5, 1, 3]$, $[9, 0, 4]$, (b) $[2, 3, 5]$, $[3, 4, 9]$, $[5, 8, 17]$, (c) $[1, 2, 4]$, $[3, 5, 9]$.

16. Wskaż skończony zbiór A rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:
- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^3$;
 - (b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{[t+u, u, 2t, t-u] : t, u \in \mathbb{R}\}$;
 - (c) $V = (\mathbb{Z}_3)^3$, $U = \text{Sol}(X_1 + X_2 - X_3 = 0)$;
 - (d) $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}\right)$.
17. Wykonując przekształcenia elementarne na zbiorze rozpinającym, wyznacz całkowicie zredukowany układ rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:
- (a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{lin}([1, 2, -2, 2], [0, 3, -3, 0], [-2, 5, -5, -4], [-1, 0, 0, -2], [3, -1, -1, 6])$;
 - (b) $V = (\mathbb{Z}_7)^3$, $U = \text{lin}([1, 3, 3], [2, 5, 0], [2, 1, 4], [5, 2, 0])$;
 - (c) $V = \mathbb{Q}^3$, $U = \text{lin}([1, 1, 1], [2, -1, 3], [0, 1, -5], [3, -2, 1], [6, -2, -1])$.
18. Sprawdź czy dane wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ oraz $(\mathbb{Z}_7)^3$ są liniowo niezależne:
- (a) $[3, 4, 1]$, $[4, 1, 3]$, (b) $[2, 0, 3]$, $[10, 0, 15]$ (c) $[1, 1, 0]$, $[4, 3, 1]$, $[1, 4, 2]$, (d) $[4, 4, 2]$, $[3, 1, 0]$, $[2, 4, 1]$, (e) $[1, 0, 1]$, $[1, 4, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[3, 2, 1]$.
19. Sprawdź czy układ $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny, gdzie:
- (a) $k = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 6, 7]$;
 - (b) $k = 2$, $\mathbf{v}_1 = [4, -2, 6]$, $\mathbf{v}_2 = [6, -3, 9]$;
 - (c) $k = 3$, $\mathbf{v}_1 = [2, -3, 1]$, $\mathbf{v}_2 = [3, -1, 5]$, $\mathbf{v}_3 = [1, -4, 3]$.
20. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podane wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są liniowo zależne, jeśli:
- (a) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{bmatrix}$,
 - (b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 - (c) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ a \end{bmatrix}$.
21. Sprawdź czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$:
- (a) $[1, 0]$, $[1, 1]$, (b) $[1, 5]$, $[-3, -15]$, (c) $[3, 3]$, $[1, 8]$, (d) $[7, 3]$, $[-7, -3]$.
22. Sprawdź czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
- (a) $[1, 0, -1]$, $[1, 1, 3]$, $[4, 1, 1]$, (b) $[1, 5, 0]$, $[1, 2, 3]$, $[1, 4, 1]$, (c) $[1, 3, 4]$, $[2, 7, 9]$, (d) $[1, 1, 1]$, $[1, 2, 3]$, $[4, 7, 11]$, $[3, 4, 7]$.
23. Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli
- (a) $\mathbf{v}_1 = [1, -1]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1]$, $\mathbf{w} = [1, 2]$,
 - (b) $\mathbf{v}_1 = [2, 1]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 3]$, $\mathbf{w} = [1, 1]$.
24. Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli
- (a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$.
 - (b) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$.
25. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dana para wektorów tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$:
- (a) $[1, 5]$, $[8, a]$, (b) $[2, 5]$, $[4a, 7a]$?
26. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ podany układ wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
- (a) $([1, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 0, a])$ (b) $([1, 2, 1], [a, 1, 1], [2, 3, 2])$?
27. Wyznacz różnymi sposobami bazę i oblicz wymiar podprzestrzeni $\text{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) < (\mathbb{Z}_7)^n$, jeżeli
- (a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$$\text{(b) } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(c) } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(d) } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$