

Zestaw 5

Układy równań liniowych

1. Stosując twierdzenie Kroneckera-Capellego sprawdź czy następujące układy mają rozwiązania:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x - y + z - 3t = 7 \\ x + y - 2z + t = 1 \\ 2y - 5z + t = 3 \end{cases} \text{ nad } \mathbb{R}, & \text{b)} \quad & \begin{cases} -3x + y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \text{ nad } \mathbb{Q}, \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 6x + 3y + 6z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \text{ nad } \mathbb{Z}_7. \end{aligned}$$

W przypadku układu niesprzecznego sprawdź czy układ jest oznaczony czy nieoznaczony.

2. Wyznaczając macierz odwrotną do macierzy układu, rozwiąż układ równań nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}.$$

3. Stosując twierdzenie Cramera, rozwiąż następujące układy równań nad ciałem $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}, & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}, \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x + y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}, & \text{(d)} \quad & \begin{cases} y - 3z + 4t = -5 \\ x - 2z + 3t = -4 \\ 3x + 2y - 5z = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

4. Stosując metodę eliminacji Gaussa, rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ następujące układy równań:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}, & \text{b)} \quad & \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}, \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}, & \text{d)} \quad & \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}, \\ \text{e)} \quad & \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 4t = 2 \\ 6x - 4y + 4z + 3t = 3 \\ 9x - 6y + 3z + 2t = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

5. Stosując metodę eliminacji Gaussa, rozwiąż nad ciałami $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Z}_p$ następujące układy równań:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}, p = 11; & \text{b)} \quad & \begin{cases} x + 4y + 2z + 5t = 12 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}, p = 13; \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4w = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + w = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + w = 0 \end{cases}, p = 11; & \text{d)} \quad & \begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}, p = 37; \\ \text{e)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t + w = 4 \\ 3x + 6y + 5z - 4t + 3w = 5 \\ x + 2y + 7z - 4t + w = 11 \end{cases}, p = 13; & \text{f)} \quad & \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3 \\ 9x + y + 4z - 5t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 7x + y + 6z - t = 7 \end{cases}, p = 7. \end{aligned}$$

6. Każdy z następujących układów rozwiąż nad ciałami $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{11}$:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 4x + 3z = 2 \end{cases}.$$

7. Rozwiąż nad ciałem $\mathbb{C}$ następujące układy równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} (1+i)x + 2iy - z = 3+2i \\ (3+i)x + (1-i)y + 4z = 6+i \\ 5x + y - iz = 2 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad \begin{cases} (1+i)x + 2y - iz = 2-3i \\ 3x + iy + (2-i)z = 6+4i \\ (4+i)x + y + 3z = 6+6i \end{cases}.$$

8. Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań
$$\begin{cases} x + 2y + 6z + 6t &= 1 \\ x + y + z + 3t &= 2 \\ 3x + 5y + 6z + t &= \lambda \end{cases}$$
 ma rozwiązanie nad ciałem $\mathbb{Z}_7$?

Rozwiąż ten układ, gdy jest to możliwe.

9. W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} -12x - 3y - 3z &= -6 \\ 4x + 5y + z &= 3 \\ \lambda x + 4y + z &= 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + 2z + 4t &= 0 \\ 4x - 2y + z + 6t &= 2 \\ \lambda x - 4y + 5z + 14t &= 2 \end{cases}.$$

10. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż układy równań:

$$\text{(a) } \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases}, \quad \text{(b) } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + z = b \end{cases}.$$