

Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 4

Macierze: operacje na macierzach, macierz odwrotna, wyznacznik, rząd macierzy

1. Oblicz iloczyn macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^2$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$, (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oblicz:

(a) $A^2 + 2AB + B^2$ i $(A+B)^2$,

(b) $A^2 - 2AB + B^2$ i $(A-B)^2$,

(c) $A^2 - B^2$, $(A-B)(A+B)$ i $(A+B)(A-B)$.

3. Znajdź wszystkie takie macierze $A \in \mathbb{R}_2^2$, że

(a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$, (b) $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy (nad $\mathbb{R}$):

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$.

Sprawdź czy powyższe macierze są odwracalne. Wyznacz ślad każdej z macierzy.

5. Oblicz:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 10 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{11}$, (c) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 11 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 1 & 10 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{13}$.

6. Wyznacz rzędy następujących macierzy (nad ciałem $\mathbb{R}$):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

7. Wyznacz rzędy następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{13}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

8. Wyznaczając rzędy, sprawdź czy następujące macierze są odwracalne (nad ciałem $\mathbb{R}$). W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz odwrotną:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \text{(e)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

9. Rozwiąż następujące równania macierzowe:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & X \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \text{(c)} \quad & X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \\
 \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$