

Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 3

Liczby zespolone

1. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:

a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$, b) $(2 + 3i)x + (4 - 5i)y = 6 - 2i$,

c) $(4 - 3i)2x + (1 + i)2y = 7 - 12i$, d) $\frac{2+i}{3-i}x + \left(\frac{4-i}{3-i}\right)^2 y = 1 + i$.

2. Rozwiąż równania:

a) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$, b) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$.

3. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} (1+i)z + (2-i)w = 2-2i \\ (1-i)z - (3+i)w = -3+3i \end{cases}$, b) $\begin{cases} (3-i)z + (4+2i)w = 2+6i \\ (4+2i)z - (2+3i)w = 5+4i \end{cases}$,
c) $\begin{cases} \frac{z}{2-i} + \frac{w}{1+i} = 2 \\ \frac{5z}{(2-i)^2} + \frac{2w}{(1+i)^2} = 3 \end{cases}$.

4. Rozwiąż równania:

a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$, b) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$,

c) $z^2 + z(1 + i) + 2i = 0$, d) $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$.

5. Rozwiąż równania:

a) $(1 + i)z^2 - (3 + 7i)z + 10i = 0$,

b) $(1 + 2i)z^2 - (-1 + 8i)z + (-5 + 5i) = 0$,

c) $(1 + 2i)z^2 - (1 + 7i)z + (-2 + 6i) = 0$,

d) $(1 + i)z^2 - (1 + 5i)z + (-2 + 6i) = 0$,

e) $(1 - i)z^2 - (7 + 3i)z + 10i = 0$,

f) $(1 - 2i)z^2 - (4 + 7i)z + (7 + i) = 0$,

g) $(1 + i)z^2 - (3 + 3i)z + (4 + 2i) = 0$.

6. Rozwiąż równania:

a) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$, b) $z^4 + (15 + 7i)z^2 + 8 = 0$, c) $z^4 - (18 + 4i)z^2 + 77 - 36i = 0$.

7. Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają równania i nierówności:

a) $|z| < 2$, b) $|z - 1| = 3$, c) $|z - 1 - 2i| \leq 3$, d) $1 < |z| < 5$,

e) $\frac{|z-3|}{|z+1|} \geq 1$, f) $\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$, g) $|z - i| = |z + i|$, h) $\text{Arg} \frac{z-i}{z+i} = \frac{\pi}{2}$,

i) $0 \leq \text{Re}(iz) \leq 1$, j) $\text{Re}(z^2) > 1$?

8. Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad 1+i,$
 $1-i, \quad -1+i, \quad 1+i\sqrt{3}, \quad -1-i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}-i,$
 $\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \quad \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}.$

9. Oblicz (podając dokładne wartości części rzeczywistej i urojonej):

(a) $\frac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$, (b) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}$, (c) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{31}}$, (d) $\frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$, (e) $\frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$,
(f) $\frac{(-1+i)^{32}}{(-\sqrt{3}+i)^{28}}$, (g) $\frac{(-1-i)^{28}}{(1-i\sqrt{3})^{20}}$.

10. Wyznacz:

$\sqrt{2i}, \quad \sqrt{-8i}, \quad \sqrt{3-4i}, \quad \sqrt{-15+8i}, \quad \sqrt{-3-4i}, \quad \sqrt{-11+60i}, \quad \sqrt[3]{-8i}, \quad \sqrt{-8+6i}.$

11. Wyznacz: (a) wszystkie pierwiastki stopnia 3 z liczby -1 , (b) wszystkie pierwiastki stopnia 3 z liczby i , (c) wszystkie pierwiastki stopnia 3 z 1 , (d) wszystkie pierwiastki stopnia 4 z -1 , (e) wszystkie pierwiastki stopnia 8 z 1 .