

Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 2

Kongruencje

1. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n :

- (a) liczba $10^n + 17$ jest podzielna przez 3,
- (b) liczba $3^{4n+3} - 17$ jest podzielna przez 10.

2. Wyznacz reszty z dzielenia:

- (a) 15^{231} przez 14,
- (b) $22^{80} + 7$ przez 11,
- (c) $231^{208} + 462$ przez 23,
- (d) $521^{204} + 26$ przez 65.

3. Rozwiąż następujące układy kongruencji:

$$\text{a) } \begin{cases} X \equiv 4 \pmod{5} \\ X \equiv 1 \pmod{12} \\ X \equiv 7 \pmod{14} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} X \equiv 1 \pmod{25} \\ X \equiv 2 \pmod{4} \\ X \equiv 3 \pmod{7} \\ X \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 3X \equiv 7 \pmod{10} \\ 2X \equiv 5 \pmod{15} \\ 7X \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}, \quad \text{d) } \begin{cases} 5X \equiv 1 \pmod{12} \\ 5X \equiv 2 \pmod{8} \\ 7X \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}.$$

W przypadku każdego układu niesprzecznego znajdź najmniejszą liczbę naturalną spełniającą ten układ.