

Zestaw 1

- Podziel z resztą:
(a) 134 przez 26,
(b) -134 przez 26,
(c) 134 przez -26 ,
(d) -134 przez -26 .
- Liczba 100 przy dzieleniu z resztą przez pewną liczbę b daje resztę 6 i iloraz q . Wyznacz b i q .
- Liczba 42157 przy dzieleniu przez pewną liczbę naturalną b daje iloraz $q = 231$. Wyznacz dzielnik b oraz resztę r .
- Rozkładając liczbę 4200 na czynniki pierwsze, wyznacz ilość wszystkich jej dzielników naturalnych. Ile dzielników całkowitych ma 4200?
- Rozkładając na czynniki pierwsze liczby a i b , wyznacz $\text{NWD}(a, b)$ oraz $\text{NWW}(a, b)$, jeśli:
(a) $a = 360$, $b = 504$, (b) $a = 2520$, $b = 6600$, (c) $a = 187$, $b = 533$.
- Korzystając z algorytmu Euklidesa, wyznacz $\text{NWD}(a, b)$, jeśli:
(a) $a = 237$, $b = 87$, (b) $a = 5720$, $b = 4370$, (c) $a = 2345$, $b = 525$.
Wyznacz $\text{NWW}(a, b)$.
- Korzystając z rozszerzonego algorytmu Euklidesa, wyznacz $\text{NWD}(a, b)$ oraz liczby $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\text{NWD}(a, b) = ax + by$, gdzie a i b są liczbami z zadania 6.
- Rozwiąż w liczbach naturalnych następujące układy równań:
$$\begin{cases} x + y = 180 \\ \text{NWD}(x, y) = 30 \end{cases}, \begin{cases} xy = 720 \\ \text{NWD}(x, y) = 4 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \text{NWD}(x, y) = 15 \\ \text{NWW}(x, y) = 420 \end{cases}.$$
- Wyznacz możliwie najprostszym sposobem $\text{NWD}(1411, 4641, 5253)$, $\text{NWD}(299, 391, 667)$, $\text{NWD}(279, 372, 1395)$.
- Sprawdź czy podany układ (w którym $+$ oznacza zwykłe dodawanie liczb) jest grupą abelową:
(a) $(\mathbb{R}, +)$, (b) $(\mathbb{N}, +)$, (c) $(\mathbb{Z}, +)$, (d) $(\{0, 1\}, +)$, (e) $(\langle 0; \infty \rangle, +)$.
- Sprawdź czy podany układ (w którym $\cdot$ oznacza zwykłe mnożenie liczb) jest grupą abelową:
(a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, (b) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, (c) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, (d) $(\{1, -1\}, \cdot)$.
- Wykonaj działania $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1) \cdot (5 \cdot 12 - 7)^{-1}$ w ciałach $\mathbb{Z}_{17}$ i $\mathbb{Z}_{23}$.
- (a) Ułóż tabelkę funkcji $x \mapsto x^2$ w ciele $\mathbb{Z}_{11}$.
(b) Ułóż tabelkę funkcji $x \mapsto x^{-1}$ w ciele $\mathbb{Z}_{13}$.
- Wyznacz dziedzinę oraz ułóż tabelkę funkcji $x \mapsto \frac{x+2}{2x-1}$ w ciele $\mathbb{Z}_7$.
- Znajdź taki element w ciele $\mathbb{Z}_5$, że każdy inny element $\neq 0$ jest jego potęgą. To samo dla ciał $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$.
- Sprawdź czy istnieją $-$ i wyznacz, jeśli istnieją $-$ pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.
- Rozwiąż równanie:
a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ w $\mathbb{Z}_{11}$, b) $x^2 + x + 3 = 0$ w $\mathbb{Z}_5$,
c) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ w $\mathbb{Z}_{13}$, d) $2x^3 + 3x^2 + x - 4 = 0$ w $\mathbb{Z}_7$.
- Rozwiąż układ równań
a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{13}$ i w $\mathbb{Z}_7$, b) $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 4x + 3y = b \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{11}$ i w $\mathbb{Z}_5$.