

Dodatkowe zadania do Kolokwium 1.

Arytmetyka reszt:

1. Rozwiązać następujące układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_7, \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 7y = 9 \\ 2x + 9y = 10 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{11}, \quad \text{c) } \begin{cases} x + 11y = 1 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{13}.$$

2. Rozwiązać następujące równania kwadratowe:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 + 3x + 4 &= 0 \text{ w } \mathbb{Z}_7, & \text{b) } x^2 + 5x + 7 &= 0 \text{ w } \mathbb{Z}_{19}, & \text{c) } x^2 + x + 1 &= 0 \text{ w } \mathbb{Z}_{23}, \\ \text{d) } x^2 + 10x + 5 &= 0 \text{ w } \mathbb{Z}_{13}, & \text{e) } 5x^2 + 4x + 1 &= 0 \text{ w } \mathbb{Z}_7, & \text{f) } 4x^2 + 3x + 2 &= 0 \text{ w } \mathbb{Z}_{11}. \end{aligned}$$

Liniowe równania diofantyczne:

1. Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x + 4y &= 13, & \text{b) } 21x + 111y &= 2, & \text{c) } 25x + 100y &= 6, \\ \text{d) } 39x - 13y &= 11, & \text{e) } 122x + 129y &= 2, & \text{f) } 27x + 28y &= 29. \end{aligned}$$

2. Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania:

$$\begin{aligned} \text{a) } 6x + 10y + 15z &= 1, & \text{b) } 2x + 8y + 112z &= 9, & \text{c) } 1122x + 977233y - 111111z &= 5, \\ \text{d) } 18x + 20y + 15z &= 1, & \text{e) } 105x + 119y + 161z &= 83, & \text{d) } 2x + 42y + 70z + 245t &= 1. \end{aligned}$$

3.

a) Do przewozu zboża są do dyspozycji worki 60-cio i 80-cio kilogramowe. Ile potrzeba poszczególnych worków do przewozu 440 kg zboża, jeżeli wszystkie worki muszą być pełne?

b) Ile biletów po 3 zł i po 5 zł można kupić za 149 zł, jeżeli należy wydać wszystkie pieniądze?

Indukcja matematyczna:

1. Udowodnić następujące twierdzenia:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \mid n^2 - n, & & \text{b) } 6 \mid n^3 - n, & & \text{c) } 30 \mid n^5 - n, & & \text{d) } 42 \mid n^7 - n, \\ \text{e) } 546 \mid n^{13} - n, & & \text{f) } 9 \mid 10^n - 1, & & \text{g) } 12 \mid 10^n - 4, & & \text{h) } 11 \mid 10^n - (-1)^n, \\ \text{i) } 11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}, & & \text{j) } 10 \mid 2^{2^n} - 6, & & \text{k) } 41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}, & & \text{l) } 25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4. \end{aligned}$$

2. Udowodnić następujące twierdzenia:

$$\text{a) } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = s_1,$$

$$\text{b) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = s_2,$$

$$\text{c) } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = s_1^2,$$

$$\text{d) } 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}s_2(3n^2 + 3n - 1),$$

$$\text{e) } 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{3}s_1^2(2n^2 + 2n - 1),$$

$$f) 1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + n^6 = \frac{1}{7}s_2(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$$

3. Udowodnić następujące twierdzenia:

$$a) (1+a)^n \geq 1+na, \text{ dla } a > -1, n \geq 0 \text{ (nierówność Bernoulliego, 1689),}$$

$$b) (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2, \text{ dla } a \geq 0, n \geq 0,$$

$$c) (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3, \text{ dla } a > -1, n \geq 0,$$

$$d) (1+a)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{a}{n}, \text{ dla } a > -1, n \geq 1,$$

$$e) (1+a)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{a}{n(1+a)}, \text{ dla } a > -1, n \geq 1,$$

$$f) (1+a)^{1+\frac{1}{n}} \geq 1 + \left(1 + \frac{1}{n}a\right), \text{ dla } a > -1, n \geq 1.$$

Twierdzenie Eulera i Małe Twierdzenie Fermata:

1. Wyznaczyć resztę z dzielenia:

$$a) 5^{123} \text{ przez } 6, \quad b) 23^{421} \text{ przez } 24, \quad c) 11^{2025} \text{ przez } 17, \quad d) 8^{88} \text{ przez } 7.$$

Chińskie Twierdzenie o resztach:

1. Rozwiązań następujące układy kongruencji:

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} x \equiv 9 \pmod{10} \\ x \equiv 14 \pmod{21} \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}, \quad c) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}, \\ d) \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 6 \pmod{9} \\ x \equiv 10 \pmod{12} \end{cases}, \quad e) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{10} \\ x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv 21 \pmod{25} \end{cases}, \quad f) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{8} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \\ x \equiv 24 \pmod{25} \end{cases}. \end{aligned}$$