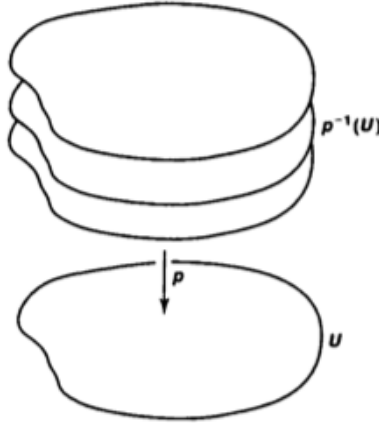


4 Przestrzenie nakrywające.

Poznaliśmy dotychczas definicję grupy fundamentalnej i jeden jej przykład, a mianowicie udowodniliśmy, że każda wypukła podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma trywialną grupę fundamentalną. Obecnie będziemy chcieli przejść do bardziej zaawansowanych przykładów – do ich policzenia będziemy potrzebowali odpowiednich narzędzi, których konstrukcją się teraz zajmujemy, zaś pierwszym z nich będą przestrzenie nakrywające.

Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem ciągłym i surjektywnym. Powiemy, że otwarty podzbiór $U \subseteq B$ jest **równo nakryty** przez p , jeżeli przeciwobraz $p^{-1}(U)$ jest rozłączną sumą zbiorów otwartych $V_\alpha \subseteq E$ o tej własności, że dla każdego α zwięźenie $p|_{V_\alpha}$ jest homeomorfizmem pomiędzy V_α a U . Rodzinę $\{V_\alpha\}$ będziemy nazywali podziałem $p^{-1}(U)$ na **plastry**.

Jeśli U jest zbiorem otwartym równo nakrytym przez p , to często będziemy wyobrażać sobie zbiór $p^{-1}(U)$ jako stos „naleśników” szybujących w powietrzu nad zbiorem U , z których każdy jest tego samego kształtu i rozmiaru, co zbiór U :



Zauważmy, że jeśli U jest zbiorem równo nakrytym przez p oraz $W \subseteq U$ jest zbiorem otwartym zawartym w U , to również W jest równo nakryty przez p .

Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem ciągłym i surjektywnym. Jeżeli każdy punkt $b \in B$ ma otoczenie U które jest równo nakryte przez p , to p nazywamy **odwzorowaniem nakrywającym**, zaś E **przestrzenią nakrywającą**.

Zauważmy, że jeśli $p: E \rightarrow B$ jest odwzorowaniem nakrywającym, to dla każdego $b \in B$ podprzestrzeń $p^{-1}(b)$ przestrzeni E wyposażona jest w topologię dyskretną: istotnie, każdy plaster V_α jest zbiorem otwartym w E i przecina się ze zbiorem $p^{-1}(b)$ w jednym punkcie, a natem punkt ten jest zbiorem otwartym w przestrzeni $p^{-1}(b)$.

Zauważmy ponadto, że jeśli $p: E \rightarrow B$ jest odwzorowaniem nakrywającym, to jest też odwzorowaniem otwartym. Istotnie, założmy, że A jest zbiorem otwartym w E . Dla ustalonego $x \in p(A)$ wybierzmy otoczenie U punktu x , które jest równo nakryte przez p . Niech $\{V_\alpha\}$ będzie podziałem $p^{-1}(U)$ na plastry. Wówczas istnieje punkt $y \in A$ taki, że $p(y) = x$. Niech V_β będzie plasterkiem zawierającym punkt y . Zbiór $V_\beta \cap A$ jest otwarty w E , a więc otwarty w V_β . Ponieważ p odwzorowuje V_β homeomorficznie na U , zatem $p(V_\beta \cap A)$ jest otwarty w U , a więc otwarty w B . Tym samym wskazaliśmy otwarte otoczenie punktu x zawarte w $p(A)$, co dowodzi, że $p(A)$ jest otwarty.

Przykład 4.1. Niech X będzie dowolną przestrzenią, niech $i: X \rightarrow X$ oznacza odwzorowanie identycznościowe. Wówczas i jest odwzorowaniem nakrywającym. Ogólniej, niech E będzie przestrzenią $X \times \{1, \dots, n\}$ składającą się z n kopii przestrzeni X . Odwzorowanie $p: E \rightarrow X$ dane wzorem $p(x, i) = x$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ również jest odwzorowaniem nakrywającym.

W praktyce będziemy często zakładać, że przestrzenie nakrywające są łukowo spójne – unikniemy w ten sposób trywialnych nakryć w stylu „stosu naleśników” jak w powyższym przykładzie. Pierwszego nietrywialnego przykładu przestrzeni nakrywającej dostarczy nam poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 4.2. *Odwzorowanie $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dane wzorem*

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

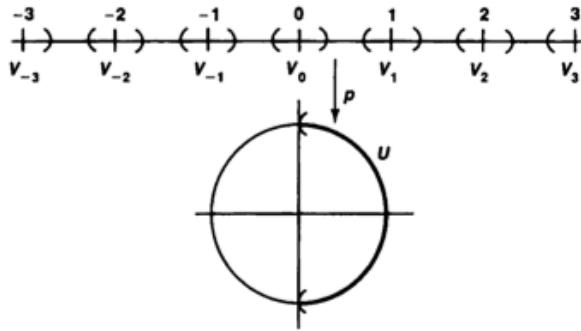
jest odwzorowaniem nakrywającym.

Możemy sobie wyobrazić powyższe odwzorowanie jako funkcję „nawijającą” prostą rzeczywistą dookoła okręgu S^1 , przy czym za każdym kolejnym przebiegiem zostaje „nawinięty” odcinek $[n, n+1]$.

Dowód. To, że p jest odwzorowaniem nakrywającym, wynika bezpośrednio z prostych własności funkcji trygonometrycznych. Rozważmy, na przykład, podzbiór U okręgu S^1 złożony z tych punktów, których pierwsza współrzędna jest dodatnia. Zbiór $p^{-1}(U)$ składa się z tych liczb x , dla których $\cos 2\pi x$ jest dodatni, a więc jest sumą przedziałów

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right),$$

dla $n \in \mathbb{Z}$:



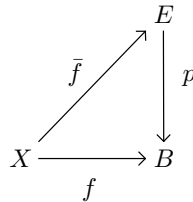
Dalej, p zwięzione do dowolnego przedziału domkniętego $\bar{V}_n$ jest różnowartościowe, ponieważ $\sin 2\pi x$ jest funkcją ściśle monotoniczną na takim przedziale. Ponadto p odwzorowuje $\bar{V}_n$ surjektywnie na $\bar{U}$ oraz V_n na U , wobec znanego z analizy twierdzenia o wartości średniej. Skoro $\bar{V}_n$ jest zbiorem zwartym, to $p|_{\bar{V}_n}$ odwzorowuje $\bar{V}_n$ homeomorficznie na $\bar{U}$. W szczególności $p|_{V_n}$ jest homeomorfizmem pomiędzy V_n i U .

Podobny argument możemy zastosować dla przecięcia S^1 z górną, dolną i lewą półpłaszczyzną. Zbiory te pokrywają S^1 i każdy z nich jest równo nakryty przez p . Wobec tego $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ jest odwzorowaniem nakrywającym. $\square$

5 Grupa fundamentalna okręgu.

Poznamy obecnie podstawowe związki między przestrzeniami nakrywającymi i grupą fundamentalną i wykorzystamy je do obliczenia grupy fundamentalnej okręgu.

Niech $p: E \rightarrow B$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Jeżeli $f: X \rightarrow B$ jest funkcją ciągłą, to **podniesieniem** funkcji f będziemy nazywać odwzorowanie $\bar{f}: X \rightarrow E$ takie, że $p \circ \bar{f} = f$:



Podniesienia funkcji w przypadku, gdy p jest odwzorowaniem nakrywającym, są ważnym narzędziem w studiowaniu grup fundamentalnych. Pokażemy, że dla przestrzeni nakrywających możemy podnosić ścieżki oraz homotopie ścieżek. Zaczniemy jednak od przykładu:

Przykład 5.1. Rozważmy odwzorowanie nakrywające $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ z Twierdzenia 4.2.

Ścieżka $f: I \rightarrow S^1$ zaczynająca się w punkcie $b_0 = (1, 0)$ dana wzorem

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$$

podnosi się do ścieżki $\bar{f}(s) = \frac{s}{2}$ łączącej punkty 0 i $\frac{1}{2}$.

Ścieżka $g: I \rightarrow S^1$ zaczynająca się w b_0 dana wzorem

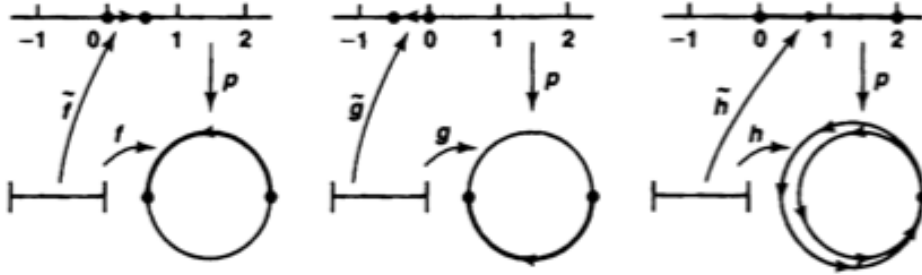
$$g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$$

podnosi się do ścieżki $\bar{g}(s) = -\frac{s}{2}$ łączącej punkty 0 i $-\frac{1}{2}$.

Ścieżka $h: I \rightarrow S^1$ zaczynająca się w b_0 dana wzorem

$$h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$$

podnosi się do ścieżki $\bar{h}(s) = 2s$ łączącej punkty 0 i 2. Intuicyjnie, to że h „nawija” przedział $[0, 1]$ dwukrotnie dookoła okręgu S^1 interpretujemy w ten sposób, że $\bar{h}$ zaczyna się w 0 i kończy w 2:



Lemat 5.2. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym, niech $p(e_0) = b_0$. Dowolna ścieżka $f: I \rightarrow B$ zaczynająca się w b_0 podnosi się do dokładnie jednej ścieżki $\bar{f}$ w E zaczynającej się w e_0 .

Dowód. Pokryjmy przestrzeń B zbiorami otwartymi U takimi, że każdy z nich jest równo nakryty przez p . Wybierzmy podział odcinka I , powiedzmy $s_0, \dots, s_n$ taki, że dla każdego i zbiór $f([s_i, s_{i+1}])$ położony jest w jednym zbiorze U (istnienie takiego podziału wynika z lematu Lebesgue’a o liczbie). Podniesienie $\bar{f}$ będziemy definiować krok po kroku.

Po pierwsze, niech $\bar{f}(0) = e_0$. Następnie, zakładając, że $\bar{f}(s)$ jest już zdefiniowane dla $0 \leq s \leq s_i$, definiujemy $\bar{f}$ na $[s_i, s_{i+1}]$ następująco: zbiór $f([s_i, s_{i+1}])$ leży w pewnym otwartym podzbiorze U równo nakrytym przez p . Niech $\{V_\alpha\}$ będzie podziałem $p^{-1}(U)$ na plastry; każdy zbiór V_α jest homeomorficznie odwzorowany przez p na U . Element $\bar{f}(s_i)$ leży w jednym z tych zbiorów, powiedzmy w V_0 . Zdefiniujemy $\bar{f}(s)$ dla $s \in [s_i, s_{i+1}]$ równaniem

$$\bar{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s)).$$

Ponieważ $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ jest homeomorfizmem, $\bar{f}$ będzie ciągłe na $[s_i, s_{i+1}]$.

Postępując dalej w ten sposób zdefiniujemy $\bar{f}$ na całym przedziale $[0, 1]$. Ciągłość $\bar{f}$ wynika z lematu o sklejaniu, zaś to, że $p \circ \bar{f} = f$ jest bezpośrednią konsekwencją definicji $\bar{f}$.

Pozostaje wykazać jednoznaczność $\bar{f}$, co również robimy krok po kroku. Powiedzmy, że $\bar{f}$ jest innym podniesieniem f zaczynającym się w e_0 . Wtedy $\bar{f}(0) = e_0 = \bar{f}(0)$. Załóżmy, że $\bar{f}(s) = \bar{f}(s)$ dla wszystkich s takich, że $0 \leq s \leq s_i$. Niech V_0 będzie zdefiniowany tak samo, jak przed chwilą. Wtedy dla $s \in [s_i, s_{i+1}]$ $\bar{f}(s)$ jest zdefiniowane jako $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Ponieważ $\bar{f}$ jest podniesieniem f , więc odwzorowuje przedział $[s_i, s_{i+1}]$ w zbiór $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$. Plastry V_α są otwarte i rozłączne, a ponieważ zbiór $\bar{f}([s_i, s_{i+1}])$ jest spójny, więc musi w całości leżeć w jednym ze zbiorów V_α . Ponieważ $\bar{f}(s_i) = \bar{f}(s_i)$ jest elementem V_0 , więc $\bar{f}$ odwzorowuje $[s_i, s_{i+1}]$ w zbiór V_0 . Tym samym, dla $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\bar{f}(s)$ musi być równe pewnemu punktowi $y \in V_0$ leżącemu w $p^{-1}(f(s))$. Ale jest dokładnie jeden taki punkt, mianowicie $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Tym samym $\bar{f}(s) = \bar{f}(s)$ dla $s \in [s_i, s_{i+1}]$. $\square$

Lemat 5.3. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym, niech $p(e_0) = b_0$ i niech $F: I \times I \rightarrow B$ będzie funkcją ciągłą taką, że $F(0,0) = b_0$. Wówczas istnieje dokładnie jedno podniesienie funkcji F do ciągłego odwzorowania $\bar{F}: I \times I \rightarrow E$ takiego, że $\bar{F}(0,0) = e_0$. Jeżeli F jest homotopią ścieżek, to jest nią też $\bar{F}$.

Dowód. Dla danego F najpierw definiujemy $\bar{F}(0,0) = e_0$. Następnie, używając poprzedniego Lematu, rozszerzamy $\bar{F}$ do lewej krawędzi $0 \times I$ oraz dolnej krawędzi $I \times 0$ zbioru $I \times I$. Teraz pozostaje rozszerzyć $\bar{F}$ na cały zbiór $I \times I$. Zrobimy to następująco: wybierzmy podział

$$s_0 < s_1 < \dots < s_m,$$

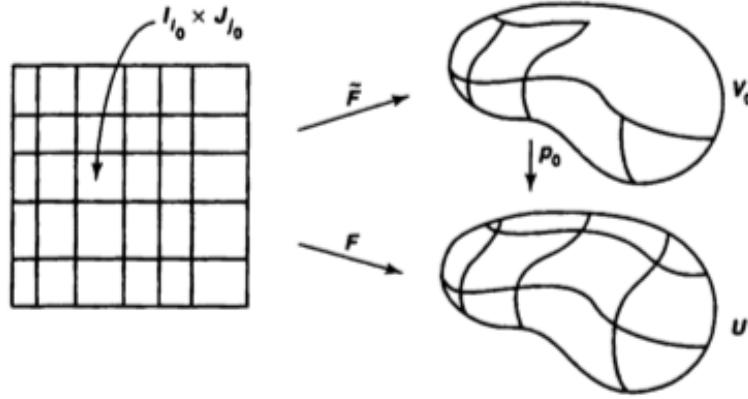
$$t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

przedziału I na tyle drobne, aby każdy prostokąt

$$I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

był odwzorowywany przez F na otwarty podzbiór B , który jest równo nakryty przez p (istnienie takich podziałów wynika z lematu Lebesgue'a o liczbie). Definiujemy podniesienie $\bar{F}$ krok po kroku rozpoczynając od prostokąta $I_1 \times J_1$, następnie poruszając się wzdłuż prostokątów $I_i \times J_1$ leżących w „dolnym wierszu” $I \times I$, następnie wzdłuż prostokątów $I_i \times J_2$ itd.

Ogólnie, przy danych i_0 i j_0 założymy, że $\bar{F}$ jest zdefiniowane na zbiorze A równym sumie $I \times 0$, $0 \times I$ oraz prostokątów „wcześniejszych” od $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (czyli prostokątów $I_i \times J_j$ dla których $j < j_0$ lub $j = j_0$ i jednocześnie $i < i_0$). Założymy, że $\bar{F}$ jest ciągłym podniesieniem $F|_A$. Definiujemy $\bar{F}$ na $I_{i_0} \times J_{j_0}$ następująco: wybierzmy otwarty podzbiór $U \subseteq B$, który jest równo nakryty przez p i zawiera zbiór $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$. Niech $\{V_\alpha\}$ będzie podziałem zbioru $p^{-1}(U)$ na plastry, w szczególności więc każdy zbiór V_α jest homeomorficznie odwzorowywany przez p na zbiór U . Podniesienie $\bar{F}$ jest już zdefiniowane na zbiorze $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$, który jest sumą mnogościową lewych i dolnych krawędzi prostokąta $I_{i_0} \times J_{j_0}$, a więc jest zbiorem spójnym. Wobec tego $\bar{F}(C)$ również jest zbiorem spójnym, a więc musi w całości zawierać się w jednym ze zbiorów V_α , powiedzmy w V_0 :



Niech $p_0: V_0 \rightarrow U$ oznacza zwięźenie p do V_0 . Ponieważ $\bar{F}$ jest podniesieniem $F|_A$, więc dla $x \in C$:

$$p_0(\bar{F}(x)) = p(\bar{F}(x)) = F(x),$$

a zatem $\bar{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$. Tym samym możemy rozszerzyć $\bar{F}$ wzorem

$$\bar{F}(x) = p_0^{-1}(F(x)),$$

dla $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$. Wobec lematu o sklepieniu tak skonstruowane rozszerzenie będzie funkcją ciągłą.

Kontynuując w opisany powyżej sposób ostatecznie definiujemy $\bar{F}$ na całym zbiorze I^2 .

Dla dowodu jednoznaczności zauważmy, że w każdym kroku konstrukcji $\bar{F}$, gdy rozszerzaliśmy $\bar{F}$ najpierw do dolnych i lewych krawędzi I^2 , a następnie do kolejnych prostokątów $I_i \times J_j$, istnieje tylko jedna możliwość na wykonanie takiego rozszerzenia w sposób ciągły. Wobec tego, gdy tylko wartość $\bar{F}$ w punkcie $(0,0)$ zostanie ustalona, odwzorowanie $\bar{F}$ może być zdefiniowane w tylko jeden sposób.

Na koniec założmy, że F jest homotopią ścieżek. Chcemy pokazać, że $\bar{F}$ jest również homotopią ścieżek. Funkcja F odwzorowuje całą lewą krawędź $0 \times I$ zbioru I^2 na punkt $b_0 \in B$. Ponieważ $\bar{F}$ jest podniesieniem F , więc odwzorowuje tę krawędź w zbiór $p^{-1}(b_0)$. Wszelako zbiór ten jest wyposażony w topologię dyskretną jako podprzestrzeń E . Ponieważ $0 \times I$ jest zbiorem spójnym, zaś $\bar{F}$ jest funkcją ciągłą, zbiór $\bar{F}(0 \times I)$ jest spójny i tym samym musi być singletonem. Podobnie, $\bar{F}(1 \times I)$ musi być singletonem, a więc $\bar{F}$ jest homotopią ścieżek. $\square$

Twierdzenie 5.4. *Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym i niech $p(e_0) = b_0$. Niech ponadto f i g będą dwiema ścieżkami w B od b_0 do b_1 , zaś $\bar{f}$ i $\bar{g}$ niech będą ich podniesieniami w E rozpoczynającymi się w e_0 . Jeśli istnieje homotopia ścieżek pomiędzy f i g , to $\bar{f}$ i $\bar{g}$ kończą się w tym samym punkcie i istnieje homotopia ścieżek pomiędzy nimi.*

Dowód. Niech $F: I \times I \rightarrow B$ będzie homotopią ścieżek pomiędzy f i g . Wówczas $F(0,0) = b_0$. Niech $\bar{F}: I \times I \rightarrow E$ będzie podniesieniem F do E takim, że $\bar{F}(0,0) = e_0$. Wobec poprzedniego Lematu, $\bar{F}$ jest homotopią ścieżek, a zatem $\bar{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ i $\bar{F}(1 \times I) = \{e_1\}$.

Zwężenie $\bar{F}|_{I \times 0}$ funkcji $\bar{F}$ do dolnej krawędzi zbioru $I \times I$ jest ścieżką w E zaczynającą się w e_0 , która podnosi się do $F|_{I \times 0}$. Wobec jednoznaczności podniesień ścieżek konieczne zachodzi $\bar{F}(s,0) = \bar{f}(s)$. Podobnie $\bar{F}|_{I \times 1}$ jest ścieżką w E , która podnosi $F|_{I \times 1}$ i zaczyna się w e_0 , ponieważ $\bar{F}(0 \times I) = \{e_0\}$. Wobec jednoznaczności podniesień ścieżek, $\bar{F}(s,1) = \bar{g}(s)$. Tym samym zarówno $\bar{f}$ jak i $\bar{g}$ kończą się w e_1 i $\bar{F}$ jest homotopią ścieżek pomiędzy nimi. $\square$

Niech zatem $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym i niech $b_0 \in B$. Wynierzmy $e_0 \in E$ tak, aby $p(e_0) = b_0$. Dla danego elementu $[f]$ grupy $\pi_1(B, b_0)$ niech $\bar{f}$ będzie podniesieniem f do ścieżki w E zaczynającej się w e_0 . Niech $\varphi([f])$ oznacza punkt końcowy $\bar{f}(1)$ ścieżki $\bar{f}$. W świetle powyższego Twierdzenia φ jest dobrze określoną funkcją

$$\varphi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

Będziemy nazywać φ **odpowiedniością podniesień** indukowaną przez odwzorowanie nakrywające p . Oczywiście φ zależy od wyboru punktu e_0 .

Twierdzenie 5.5. *Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym i niech $p(e_0) = b_0$. Jeśli E jest łukowo spójna, to wtedy odpowiedność podniesień*

$$\varphi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

jest surjektywna. Jeśli E jest jednospójna, to φ jest bijekcją.

Dowód. Jeżeli E jest łukowo spójna, to dla danego $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ istnieje ścieżka $\bar{f}$ w E od e_0 do e_1 . Wówczas $f = p \circ \bar{f}$ jest pętlą w B zaczepioną w b_0 , więc $\varphi([f]) = e_1$ zgodnie z definicją.

Niech teraz E będzie przestrzenią jednospójną. Niech $[f]$ oraz $[g]$ będą dwoma elementami grupy $\pi_1(B, b_0)$ takimi, że $\varphi([f]) = \varphi([g])$. Niech $\bar{f}$ i $\bar{g}$ będą podniesieniami f i g do ścieżek w E , które zaczynają się w e_0 . Natenczas $\bar{f}(1) = \bar{g}(1)$. Ponieważ E jest jednospójna, więc istnieje homotopia ścieżek $\bar{F}$ w E pomiędzy $\bar{f}$ i $\bar{g}$. Wówczas $p \circ \bar{F}$ jest homotopią ścieżek w B pomiędzy f i g . $\square$

Twierdzenie 5.6. *Grupa fundamentalna S^1 jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}$.*

Dowód. Niech $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ będzie odwzorowaniem nakrywającym z Twierdzenia 4.2, niech $e_0 = 0$ i niech $b_0 = p(e_0)$. Wówczas $p^{-1}(b_0)$ jest zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Ponieważ $\mathbb{R}$ jest przestrzenią jednospójną, więc odpowiedność podniesień

$$\varphi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

jest bijekcją. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że φ jest homomorfizmem.

Dla danych elementów $[f]$ i $[g]$ grupy $\pi_1(B, b_0)$ niech $\bar{f}$ i $\bar{g}$ będą ich podniesieniami do ścieżek w $\mathbb{R}$ zaczynających się w punkcie 0. Niech $n = \bar{f}(1)$ oraz $m = \bar{g}(1)$. Wtedy, wprost z definicji, $\varphi([f]) = n$ oraz $\varphi([g]) = m$. Niech $\bar{\bar{g}}$ będzie ścieżką w $\mathbb{R}$ daną wzorem:

$$\bar{\bar{g}}(s) = n + \bar{g}(s).$$

Ponieważ $p(n+x) = p(x)$, dla $x \in \mathbb{R}$, więc ścieżka $\bar{g}$ jest podniesieniem g , które zaczyna się w n . Wobec tego produkt $\bar{f} * \bar{g}$ jest dobrze zdefiniowany i jest podniesieniem $f * g$, które zaczyna się w 0, jak można się łatwo przekonać. Końcem tej ścieżki jest $\bar{g}(1) = n + m$. Wobec tego, zgodnie z przyjętymi definicjami:

$$\varphi([f] * [g]) = n + m = \varphi([f]) + \varphi([g]). \quad \square$$