

2 Grupa fundamentalna.

Zbiór wszystkich klas homotopii ścieżek z działaniem produktowania w przestrzeni X nie tworzy grupy, ponieważ nie dla wszystkich par ścieżek produkt jest dobrze określony. Jeżeli jednak wybierzemy w X „punkt bazowy” x_0 i ograniczymy się do klas ścieżek, które zaczynają się i kończą się w tym punkcie – będziemy je nazywać **pętlami** – otrzymamy grupę, którą będziemy nazywać **grupą fundamentalną** przestrzeni X **względem punktu** x_0 (albo **pierwszą grupą homotopii** przestrzeni X) i oznaczać $\pi_1(X, x_0)$.

Przykład 2.1. $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ jest grupą trywialną. Istotnie, jeżeli f jest pętlą w $\mathbb{R}^n$ zaczepioną w punkcie x_0 , to homotopia prostoliniowa jest homotopią ścieżek pomiędzy f a ścieżką stale równą x_0 .

Ogólniej, jeżeli X jest dowolnym podzbiorem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to $\pi_1(X, x_0)$ jest grupą trywialną. W szczególności **kula jednostkowa**

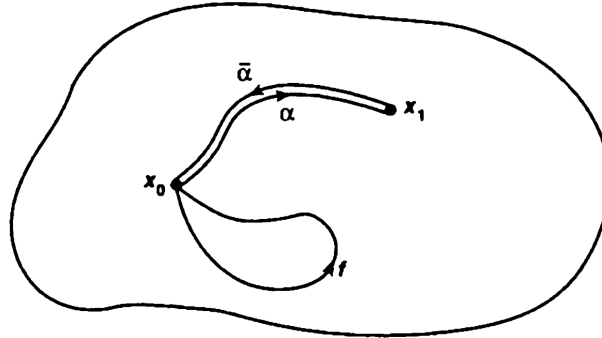
$$B^n = \{x \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

ma trywialną grupę fundamentalną.

Naturalne pytanie, jakie nasuwa się zaraz po wprowadzeniu definicji grupy fundamentalnej to w jakim stopniu $\pi_1(X, x_0)$ zależy od wyboru punktu x_0 . Celem jego rozstrzygnięcia wprowadźmy następujące oznaczenie: niech α będzie ścieżką w X od x_0 do x_1 . Zdefiniujmy odwzorowanie $\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ wzorem

$$\hat{\alpha}([f]) = [\alpha^{-1}] * [f] * [\alpha].$$

Zauważmy, że odwzorowanie to jest dobrze określone: jeśli f jest pętlą zaczepioną w x_0 , to $\alpha^{-1} * (f * \alpha)$ jest pętlą zaczepioną w x_1 , a więc $\hat{\alpha}$ przekształca $\pi_1(X, x_0)$ w $\pi_1(X, x_1)$:



Okazuje się jednak, że $\hat{\alpha}$ to o wiele więcej, niż tylko dobrze określona funkcja:

Twierdzenie 2.2. *Funkcja $\hat{\alpha}$ jest izomorfizmem.*

Dowód. Istotnie, dla $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ mamy:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f] * [g]) &= ([\alpha^{-1}] * [f] * [\alpha]) * ([\alpha^{-1}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\alpha^{-1}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]), \end{aligned}$$

a więc $\hat{\alpha}$ jest homomorfizmem. Aby udowodnić, że jest izomorfizmem, pokażemy, że jeśli β oznacza ścieżkę α^{-1} , to $\hat{\beta}$ jest homomorfizmem odwrotnym do $\hat{\alpha}$. Istotnie, dla dowolnego $[h] \in \pi_1(X, x_1)$:

$$\hat{\beta}([h]) = [\beta^{-1}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\alpha^{-1}],$$

a więc

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) = [\alpha^{-1}] * ([\alpha] * [h] * [\alpha^{-1}]) * [\alpha] = [h].$$

W podobny sposób pokazujemy, że również $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$, dla każdego $[f] \in \pi_1(X, x_1)$. $\square$

Wniosek 2.3. *Jeżeli X jest przestrzenią łukowo spójną i x_0 oraz x_1 są dowolnymi dwoma punktami w X , to $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.*

Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Jeżeli C oznacza składową łukowo spójną przestrzeni X zawierającą punkt x_0 , to $\pi_1(C, c_0) \cong \pi_1(X, x_0)$, ponieważ wszystkie pętle zaczepione w x_0 i wszystkie homotopie w X zaczepione w x_0 muszą leżeć w przestrzeni C . Tym samym $\pi_1(X, x_0)$ zależy wyłącznie od składowej łukowo spójnej X zawierającej x_0 i nie daje żadnej informacji o tym, co się dzieje w pozostałej części przestrzeni X . Z tego względu na ogół będziemy zakładać, że przestrzenie, których grupy fundamentalne będziemy badać, są łukowo spójne.

Jeśli X jest łukowo spójna, to wszystkie grupy $\pi_1(X, x)$ są izomorficzne, kusząca zatem wydaje się propozycja utożsamienia ich ze sobą i zdefiniowania tylko jednej grupy fundamentalnej dla całej przestrzeni X . Niestety, nie ma naturalnego sposobu utożsamiania ze sobą grup $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ dla różnych punktów x_0 i x_1 : dwie różne ścieżki α i β z x_0 do x_1 indukują dwa różne izomorfizmy $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$. Można pokazać (pozostawiamy to Czytelnikowi jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania), że $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $\pi_1(X, x_0)$ jest abelowa.

Przestrzeń X będziemy nazywać **jednospójną**, jeżeli jest łukowo spójna i $\pi_1(X, x_0)$ jest grupą trywialną dla pewnego $x_0 \in X$, a więc dla wszystkich $x_0 \in X$.

Lemat 2.4. *W przestrzeni jednospójnej X dowolne dwie ścieżki o takich samych punktach początkowych i końcowych są homotopijne.*

Dowód. Niech α i β będą dwiema ścieżkami z x_0 do x_1 . Wówczas $\alpha * \beta^{-1}$ jest pętlą zaczepioną w x_0 . Ponieważ X jest jednospójna, więc pętla ta jest homotopijna z pętlą stałą x_0 . Zatem

$$[\alpha * \beta^{-1}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta],$$

skąd wynika, że $[\alpha] = [\beta]$. □

Jest intuicyjnie jasne, że grupa fundamentalna jest niezmiennikiem topologicznym przestrzeni X . Wygodnym sposobem formalnego udowodnienia tego twierdzenia jest wprowadzenie pojęcia homomorfizmu indukowanego przez odwzorowanie ciągłe. Niech bowiem $h: X \rightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą, która odwzorowuje punkt $x_0 \in X$ na punkt $y_0 \in Y$ – będziemy skrótowo oznaczali to pisząc

$$h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0).$$

Jeśli f jest pętlą w X zaczepioną w x_0 , to złożenie $h \circ f: I \rightarrow Y$ jest pętlą w Y zaczepioną w y_0 . Tym samym odpowiedniość $f \mapsto h \circ f$ ustala odwzorowanie $\pi_1(X, x_0)$ w $\pi_1(Y, y_0)$: dla $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ funkcję $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ definiujemy wzorem

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

i nazywamy **homomorfizmem indukowanym** przez h względem punktu x_0 . Odwzorowanie h_* jest dobrze określone, albowiem jeśli F jest homotopią ścieżek pomiędzy ścieżkami f oraz f' , to $h \circ F$ jest homotopią ścieżek pomiędzy ścieżkami $h \circ f$ oraz $h \circ f'$. Z kolei to, że h_* jest homomorfizmem wynika wprost z równania:

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

Homomorfizm h_* zależy nie tylko od funkcji $h: X \rightarrow Y$, ale również od wyboru punktu x_0 . Będzie to powodowało pewne trudności notacyjne, gdy będziemy chcieli rozważać kilka punktów bazowych w X : jeśli x_0 i x_1 będą różnymi punktami w X , nie możemy używać tego samego symbolu h_* dla dwóch różnych homomorfizmów, z których dziedziną jednego jest $\pi_1(X, x_0)$, a drugiego $\pi_1(X, x_1)$. Nawet jeśli X jest łukowo spójna, a więc grupy $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ są izomorficzne, cały czas nie są to te same grupy. W takich razach będziemy pisali

$$(h_{x_0})_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

dla oznaczenia pierwszego homomorfizmu oraz $(h_{x_1})_*$ dla oznaczenia drugiego. Notacji h_* będziemy używać wtedy, gdy rozważać będziemy zawsze jeden punkt bazowy x_0 .

Indukowane homomorfizmy zachowują się funktorialnie:

Twierdzenie 2.5. *Jeśli $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ oraz $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ są funkcjami ciągłymi, to*

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

Jeśli $i: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ jest odwzorowaniem identycznościowym, to i_ jest homomorfizmem identycznościowym.*

Dowód. Wprost z definicji:

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f]$$

oraz

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)].$$

Podobnie sprawdzamy, że $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. □

Wniosek 2.6. *Niech $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ będzie homeomorfizmem. Wówczas $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ jest izomorfizmem.*

Dowód. Niech $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ będzie odwzorowaniem odwrotnym do h . Wówczas $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$, gdzie i oznacza identyczność na (X, x_0) . Analogicznie $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$, gdzie j oznacza identyczność na (Y, y_0) . Ponieważ i_* oraz j_* są homomorfizmami identycznościowymi grup $\pi_1(X, x_0)$ oraz $\pi_1(Y, y_0)$, odpowiednio, więc k_* jest odwrotnością h_* . □

3 Wyższe grupy homotopii.

Jak wspominaliśmy, grupę fundamentalną nazywamy też pierwszą grupą homotopii. Nazwa ta sugeruje, że istnieją też wyższe grupy homotopii. Jest tak w istocie i jakkolwiek nie będziemy się nimi zbyt szczegółowo zajmować, jest to dobre miejsce, aby przynajmniej przybliżyć ich definicję.

Dla przestrzeni topologicznej X z wybranym „punktem bazowym” x_0 rozważamy zbiór $\pi_n(X, x_0)$ klas $[f]$ homotopii funkcji $f: I^n \rightarrow X$, które odwzorowują brzeg „sześcienu” I^n na punkt bazowy x_0 . Zauważmy, że jest to naturalne uogólnienie pojęcia pętli: gdy $n=1$, jednowymiarowy „sześciennik” I^1 jest po prostu odcinkiem I , zaś wymóg, aby jego brzeg był odwzorowany na punkt x_0 oznacza, że $f(0) = f(1) = x_0$, a więc że f jest pętlą zaczepioną w x_0 .

Pojęcie produktu (klas) ścieżek uogólniamy na wyższy wymiar następująco: dziedziną produktu dalej powinien być „sześciennik” I^n , musimy zatem „skleić” dwie funkcje $f, g: I^n \rightarrow X$ wzdłuż jednej ze ścian I^n :

$$f * g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{gdy } x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & \text{gdy } x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

W podobny sposób jak dla $n=1$ możemy sprawdzić, że $*$ indukuje działanie na klasach homotopii, które określa strukturę grupy $\pi_n(X, x_0)$. Także i tu napotykamy trudności ze zdefiniowaniem grup bez odniesienia do punktu bazowego.