

# Grupa fundamentalna

Jednym z podstawowych problemów w topologii jest kwestia rozstrzygnięcia, czy dwie przestrzenie topologiczne są homeomorficzne, czy nie. Nie istnieje, oczywiście, ogólna metoda rozwiązująca ten problem, ale istnieją techniki pozwalające rozstrzygnąć pewne szczególne przypadki.

Sprawdzenie, że dwie przestrzenie topologiczne **są** homeomorficzne polega na ogół na zbudowaniu odpowiedniego homeomorfizmu, czyli funkcji ciągłej, do której istnieje ciągła funkcja odwrotna.

Sprawdzenie, że dwie przestrzenie topologiczne **nie są** homeomorficzne sprowadza się, z kolei, do wykazania, że odpowiedni homeomorfizm nie istnieje. W tym celu najczęściej poszukujemy własności topologicznych, które spełnione są w jednej przestrzeni, ale nie w drugiej. Przykładowo, przedział  $[0, 1]$  nie może być homeomorficzny z przedziałem  $(0, 1)$ , bo ten pierwszy jest przestrzenią zwartą – a drugi nie; prosta rzeczywista  $\mathbb{R}$  nie może być homeomorficzna z płaszczyzną  $\mathbb{R}^2$ , gdyż po usunięciu jednego punktu ta druga dalej jest przestrzenią spójną – a ta pierwsza już nie.

Niestety, poznane na kursowych wykładach z topologii mnogościowej własności topologiczne pozwalają na rozwiązywanie problemu homeomorficzności tylko w kilku izolowanych przypadkach. Przykładowo, standardowe własności przestrzeni takie jak zwartość, spójność, lokalna spójność, metryzowalność itd. nie pozwalają na udowodnienie, że płaszczyzna  $\mathbb{R}^2$  nie jest homeomorficzna z przestrzenią  $\mathbb{R}^3$ , albo że sfera  $S^2$  nie jest homeomorficzna ani z torusem  $T$ , ani z podwójnym torusem  $T \# T$  (czyli dwoma donutami z bokami sklejonymi polewą czekoladową).

Pojawia się zatem naturalna potrzeba wprowadzenia nowych własności topologicznych, które pomogą rozstrzygnąć problem homeomorficzności w powyższych przykładach. Zaczniemy od wprowadzenia pojęcia **jednospójności** (które prawdopodobnie pojawiło się już na wykładach z analizy przy okazji omawiania całek krzywoliniowych): z grubsza biorąc, przestrzeń  $X$  nazwiemy jednospójną, gdy każdą krzywą zamkniętą można „ściągnąć” do jednego punktu. Widzimy, że dzięki jednospójności potrafimy rozróżnić  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ : po usunięciu jednego punktu z  $\mathbb{R}^3$  otrzymujemy przestrzeń jednospójną, a po usunięciu jednego punktu z  $\mathbb{R}^2$  – nie. Podobnie sfera  $S^2$  jest przestrzenią jednospójną, natomiast torus  $T$  nie jest.

Niestety, przy użyciu prostego pojęcia jednospójności dalej nie potrafimy odróżnić torusa  $T$  od podwójnego torusa  $T \# T$ . Okazuje się jednak, że możemy pojęcie jednospójności uogólnić i skonstruować obiekt algebraiczny zwany **grupą fundamentalną**. Dwie homeomorficzne przestrzenie topologiczne będą miały izomorficzne grupy fundamentalne, zaś to, że jakaś przestrzeń jest jednospójna, będzie oznaczać, że jej grupa fundamentalna jest trywialna. Dzięki grupom fundamentalnym będziemy potrafili rozróżnić  $T$  i  $T \# T$ : okaże się, że torus ma grupę fundamentalną, która jest abelowa, zaś grupa fundamentalna podwójnego torusa abelowa nie jest.

## 1 Homotopijność ścieżek.

Zanim zdefiniujemy grupę fundamentalną przestrzeni  $X$ , przyjrzymy się ścieżkom w tej przestrzeni i zdefiniujemy relację równoważności między nimi, którą nazwiemy **homotopią ścieżek**. Określimy też działanie na klasach równoważności tej relacji, które wprowadzi w nich strukturę **grupoidu**.<sup>1.1</sup>

---

1.1. **Grupoidem** nazywamy algebrę  $(G, *, {}^{-1})$ , gdzie  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$  jest **działaniem częściowym**, a więc funkcją niekoniecznie określoną na wszystkich parach z  $G \times G$ , oraz operacją unarną  ${}^{-1}$ :  $G \rightarrow G$  takimi, że:

- i. jeśli  $a * (b * c)$  jest określone, to określone jest również  $(a * b) * c$  i wówczas  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ;
- ii. dla każdego  $a \in G$  istnieje **lewa identyczność**  $e_a^l$  i **prawa identyczność**  $e_a^p$ , czyli elementy takie, że

$$e_a^l * a = a \quad \text{oraz} \quad a * e_a^p = a;$$

- iii.  $a * a^{-1} = e_a^l$  i  $a^{-1} * a = e_a^p$ .

Tu i w dalszej części wykładu przyjmijmy oznaczenie  $I = [0, 1]$ . Jeśli  $f$  i  $f'$  są przekształceniami ciągłymi z przestrzeni  $X$  do  $Y$  to powiemy, że są **homotopijne**, jeżeli istnieje przekształcenie ciągłe  $F: X \times I \rightarrow Y$  takie, że

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{oraz} \quad F(x, 1) = f'(x),$$

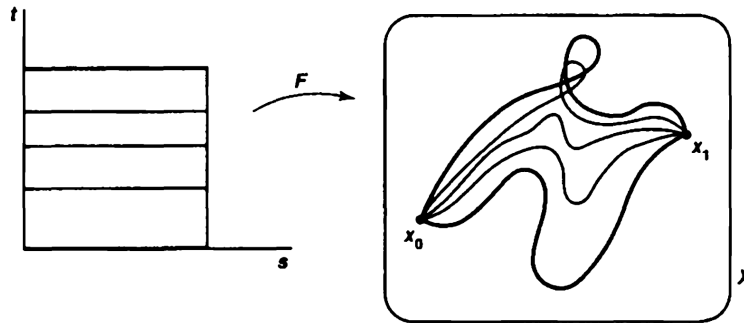
dla wszystkich  $x \in X$ . Odwzorowanie  $F$  nazywamy **homotopią** pomiędzy  $f$  i  $f'$ . Jeżeli  $f$  jest homotopijne do  $f'$ , to piszemy  $f \simeq f'$ . Jeżeli  $f \simeq f'$  oraz  $f'$  jest odwzorowaniem stałym, to mówimy, że  $f$  jest **nulhomotopijne**.

O homotopii  $F(x, t)$  wygodnie jest myśleć jako o rodzinie funkcji ciągłych z  $X$  do  $Y$  parametryzowanych przez  $t \in I$ . Jeśli wyobrazimy sobie  $t$  jako czas, to  $F$  przedstawia ciągłą „deformację” funkcji  $f$  w  $f'$  podczas czasu  $t$  zmieniającego się od 0 do 1.

Rozważymy teraz szczególny przypadek homotopii, w którym  $f$  i  $f'$  będą ścieżkami w przestrzeni  $X$ . Jako **ścieżkę** od punktu  $x_0$  do  $x_1$  rozumiemy odwzorowanie ciągłe  $f: I \rightarrow X$  takie, że  $f(0) = x_0$  oraz  $f(1) = x_1$ . Punkt  $x_0$  nazywamy **początkiem ścieżki**, zaś punkt  $x_1$  **końcem ścieżki**.

Poza „zwykłą” homotopią pomiędzy ścieżkami  $f$  i  $f'$  możemy wprowadzić też silniejszą relację, którą nazwiemy **homotopijnością ścieżek**, oznaczaną przez  $f \simeq_p f'$ : mianowicie będziemy wymagać, aby ścieżki  $f$  i  $f'$  w przestrzeni  $X$ :

- i. były homotopijne, a więc aby istniała między nimi homotopia  $F: I \times I \rightarrow X$ ;
- ii. miały takie same początki  $x_0$  i końce  $x_1$ ;
- iii.  $F(0, t) = x_0$  oraz  $F(1, t) = x_1$ , dla  $t \in I$ :



Homotopię  $F$  będziemy nazywali **homotopią ścieżek**.

Innymi słowy,  $F$  jest ciągłą „deformacją” ścieżki  $f$  w  $f'$ , podczas której punkty początkowy i końcowy pozostają stałe.

**Lemat 1.1.** *Relacje  $\simeq$  i  $\simeq_p$  są równoważnościami. Klasę abstrakcji ścieżki  $f$  względem relacji  $\simeq_p$  będziemy oznaczali przez  $[f]$ .*

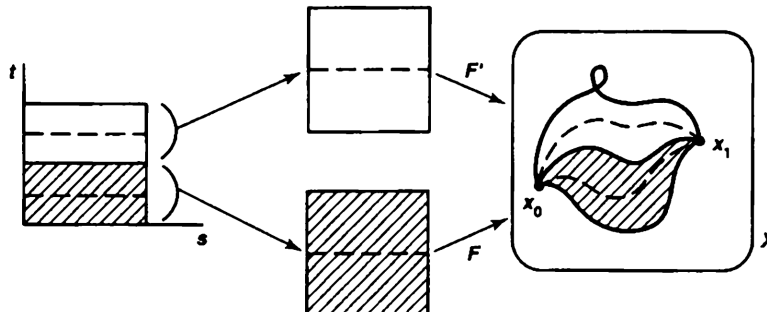
**Dowód.** Relacje  $\simeq$  i  $\simeq_p$  są zwrotne: dla danej funkcji  $f$  funkcja  $F(x, t) = f(x)$  jest homotopią. Gdy  $f$  jest ścieżką,  $F$  jest homotopią ścieżek.

Podobnie, relacje  $\simeq$  i  $\simeq_p$  są symetryczne: jeżeli  $f \simeq f'$  i  $F$  jest homotopią pomiędzy  $f$  i  $f'$ , to  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$  jest homotopią pomiędzy  $f'$  i  $f$ . Jeśli  $F$  jest homotopią ścieżek, jest nią też  $G$ .

Na koniec, relacje  $\simeq$  i  $\simeq_p$  są przechodnie: niech  $f \simeq f'$  oraz  $f' \simeq f''$  i niech  $F$  będzie homotopią pomiędzy  $f$  i  $f'$ , zaś  $F'$  homotopią pomiędzy  $f'$  i  $f''$ . Rozważmy funkcję  $G: X \times I \rightarrow Y$  daną wzorem:

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{gdy } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ F'(x, 2t - 1), & \text{gdy } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Funkcja ta jest dobrze określona, bo dla  $t = \frac{1}{2}$  mamy  $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1)$ . Ponieważ  $G$  jest ciągła na domkniętych podzbiorach  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  oraz  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$  zbioru  $X \times I$ , więc jest też ciągła na całym zbiorze  $X \times I$  i tym samym jest homotopią pomiędzy  $f$  i  $f''$ . Bez trudu sprawdzamy, że jeśli  $f$ ,  $f'$  i  $f''$  są ścieżkami z  $x_0$  do  $x_1$ , to  $G$  jest homotopią ścieżek:



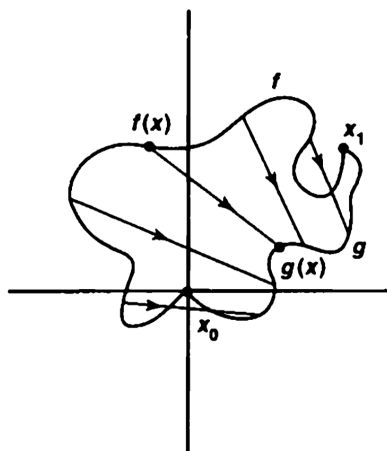
□

**Przykład 1.2.** Niech  $f$  i  $g$  będą dowolnymi funkcjami ciągłymi z przestrzeni  $X$  do  $\mathbb{R}^2$ . Zauważmy, że  $f$  i  $g$  są wówczas homotopijne. Istotnie, funkcja  $F: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dana wzorem:

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

jest homotopią pomiędzy  $f$  i  $g$ . Nazywamy ją **homotopią prostoliniową**, albowiem przesuwa ona punkt  $f(x)$  do punktu  $g(x)$  wzdłuż odcinka łączącego te punkty.

Jeśli  $f$  i  $g$  są ścieżkami od  $x_0$  do  $x_1$ , to, jak łatwo sprawdzić,  $F$  będzie homotopią ścieżek:



Ogólniej, jeżeli  $A$  będzie dowolną podprzestrzenią **wypukłą**  $\mathbb{R}^n$  (a więc taką, że dla dowolnych punktów  $a, b \in A$  do  $A$  należy też dowolny odcinek łączący  $a$  i  $b$ ), to dowolne dwie ścieżki  $f$  i  $g$  w  $A$  od  $x_0$  do  $x_1$  będą homotopijne: obraz homotopii prostoliniowej  $F$  pomiędzy  $f$  i  $g$  będzie zawarty w  $A$ .

Jeżeli  $f$  jest ścieżką w  $X$  z  $x_0$  do  $x_1$ , zaś  $g$  jest ścieżką w  $X$  z  $x_1$  do  $x_2$ , to **produktem**  $f * g$  nazywamy ścieżkę z  $x_0$  do  $x_2$  określoną wzorem

$$f * g(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{gdy } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2x - 1), & \text{gdy } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Istotnie, jest to ścieżka: sprawdzamy, że jest dobrze określona w  $x = \frac{1}{2}$  i jest funkcją ciągłą jako „sklejenie” dwóch funkcji ciągłych na zbiorach domkniętych.

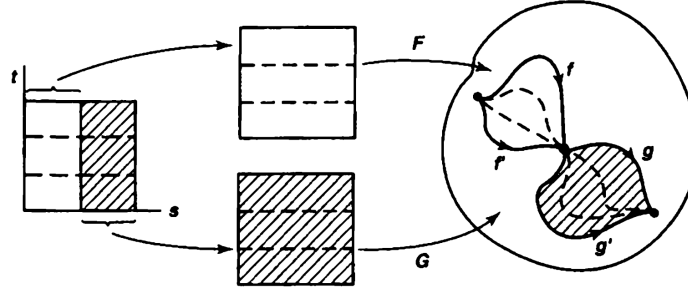
**Uwaga 1.3.** Produkt ścieżek indukuje dobrze określone działanie częściowe na klasach abstrakcji relacji  $\simeq_p$ :

$$[f] * [g] = [f * g].$$

**Dowód.** Niech  $F$  będzie homotopią ścieżek pomiędzy  $f$  i  $f'$  i niech  $G$  będzie homotopią ścieżek pomiędzy  $g$  i  $g'$ . Niech

$$H(x, t) = \begin{cases} F(2x, t), & \text{gdy } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G(2x - 1, t), & \text{gdy } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Ponieważ  $F(1, t) = x_1 = G(0, t)$  dla  $t \in I$ , odwzorowanie  $H$  jest dobrze określone. Jest też ciągłe jako „sklejenie” funkcji ciągłych na zbiorach domkniętych. Bez trudu sprawdzamy też, że jest homotopią ścieżek pomiędzy  $f * g$  i  $f' * g'$ :



□

**Twierdzenie 1.4.** Zbiór klas abstrakcji relacji  $\simeq_p$  z działaniem  $*$  jest grupoidem.

Jeżeli  $f$  jest ścieżką od  $x_0$  do  $x_1$ , zaś dla  $x \in X$  odwzorowanie  $e_x: I \rightarrow X$  oznacza funkcję stałą równą  $x$ , to  $[e_{x_1}]$  jest prawo- a  $[e_{x_0}]$  lewostronną identycznością dla  $[f]$ .

Dla danej ścieżki  $f$  z  $x_0$  do  $x_1$   $f^{-1}$  oznacza ścieżkę odwrotną z  $x_1$  do  $x_0$  daną wzorem

$$f^{-1}(x) = f(1 - x), \quad \text{dla } x \in I.$$

**Dowód.** Zauważmy na wstępie, że jeśli  $k: X \rightarrow Y$  jest odwzorowaniem ciągłym i jeśli  $F$  jest homotopią ścieżek w  $X$  pomiędzy ścieżkami  $f$  i  $f'$ , to  $k \circ F$  jest homotopią ścieżek w  $Y$  pomiędzy ścieżkami  $k \circ f$  i  $k \circ f'$ :

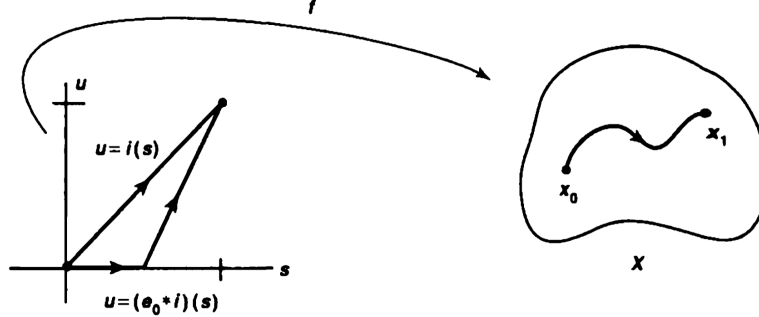


Dalej, zauważmy, że jeśli  $k: X \rightarrow Y$  jest funkcją ciągłą oraz jeśli  $f$  i  $g$  są ścieżkami w  $X$  takimi, że  $f(1) = g(0)$ , to wówczas:

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

Dowód twierdzenia podzielimy na kilka kroków.

*Krok 1:* Sprawdzimy, że spełnione są własności ii. oraz iii. z definicji grupoidu. Niech  $e_0$  oznacza ścieżkę stale równą 0 w  $I$  oraz niech  $i: I \rightarrow I$  oznacza funkcję identycznościową, która, w szczególności, jest ścieżką od 0 do 1 w  $I$ . Wówczas  $e_0 * i$  jest również ścieżką od 0 do 1 w  $I$ :

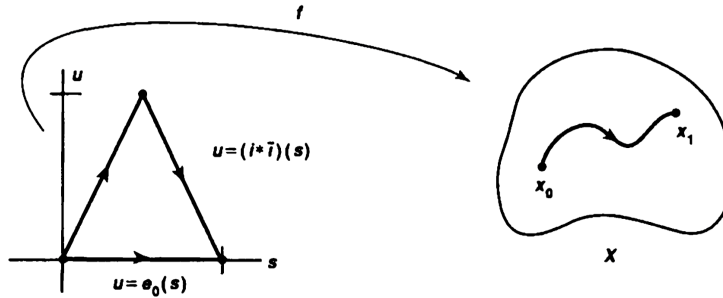


Ponieważ  $I$  jest zbiorem wypukłym, więc istnieje homotopia ścieżek  $G$  w  $I$  pomiędzy  $i$  oraz  $e_0 * i$ . Wówczas  $f \circ G$  jest homotopią ścieżek w  $X$  pomiędzy  $f \circ i = f$  oraz

$$f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f.$$

Korzystając z faktu, że jeśli  $e_1$  oznacza ścieżkę stale równą 1 w  $I$ , to  $i * e_1$  jest ścieżką homotopijną z  $i$  w  $I$ , w dokładnie taki sam sposób pokazujemy, że  $[f] * [e_{x_1}] = [f]$ .

Celem udowodnienia własności iii. zauważmy, że odwrotnością  $i$  jest  $\bar{i}(s) = 1 - s$ . Wówczas  $i * \bar{i}$  jest ścieżką w  $I$  zaczynającą i kończącą się w 0, tak samo jak ścieżka  $e_0$  stale równa 0:



Ponieważ  $I$  jest zbiorem wypukłym, istnieje homotopia ścieżek  $H$  w  $I$  pomiędzy  $e_0$  i  $i * \bar{i}$ . Zatem  $f \circ H$  jest homotopią ścieżek pomiędzy  $f \circ e_0 = e_{x_0}$  oraz

$$(f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}.$$

Korzystając z faktu, że ścieżka  $\bar{i} * i$  jest homotopijna w  $I$  z  $e_1$  w dokładnie taki sam sposób pokazujemy, że  $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$ .

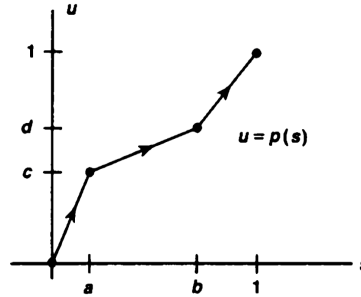
*Krok 2:* Sprawdzimy, że zachodzi prawo łączności i. W tym celu podamy alternatywny opis produktu  $f * g$ .

Jeżeli  $[a, b]$  i  $[c, d]$  są dwoma odcinkami w  $\mathbb{R}$ , to istnieje dokładnie jedna funkcja liniowa postaci  $p(x) = mx + k$ , która odwzorowuje  $a$  na  $c$  oraz  $b$  na  $d$ ; będziemy ją nazywać **funkcją dodatnio liniową** przedziału  $[a, b]$  na  $[c, d]$ , ponieważ jej wykres jest linią prostą o dodatnim współczynniku kierunkowym. Zauważmy, że odwrotność funkcji dodatnio liniowej jest funkcją dodatnio liniową, a także złożenie dwóch funkcji dodatnio liniowych jest funkcją dodatnio liniową.

Przy użyciu funkcji dodatnio liniowych możemy opisać produkt  $f * g$  następująco: na przedziale  $[0, \frac{1}{2}]$  równy jest funkcji dodatnio liniowej przedziału  $[0, \frac{1}{2}]$  na  $[0, 1]$  złożonej następnie z funkcją  $f$ , zaś na przedziale  $[\frac{1}{2}, 1]$  równy jest funkcji dodatnio liniowej przedziału  $[\frac{1}{2}, 1]$  na  $[0, 1]$  złożonej następnie z funkcją  $g$ .

Przystępujemy teraz do zweryfikowania własności i. Dla danych ścieżek  $f, g$  i  $h$  w  $X$ , produkty  $f * (g * h)$  oraz  $(f * g) * h$  są zdefiniowane o ile  $f(1) = g(0)$  oraz  $g(1) = h(0)$ . Zakładając, że warunki te są spełnione, zdefiniujemy „potrójny produkt” ścieżek  $f, g$  i  $h$  następująco: wybierzmy punkty  $a$  i  $b$  w  $I$  tak, aby  $0 < a < b < 1$ . Zdefiniujemy ścieżkę  $k_{a,b}$  w  $X$  następująco: na  $[0, a]$  będzie równa funkcji dodatnio liniowej przedziału  $[0, a]$  na  $I$  złożonej następnie z  $f$ , na  $[a, b]$  będzie równa funkcji dodatnio liniowej przedziału  $[a, b]$  na  $I$  złożonej następnie z  $g$ , wreszcie na  $[b, 1]$  będzie równa funkcji dodatnio liniowej przedziału  $[b, 1]$  na  $I$  złożonej z  $h$ . Ścieżka  $k_{a,b}$  zależy, oczywiście, od wyboru punktów  $a$  i  $b$ , ale, jak się zaraz okaże, jej klasa homotopii ścieżek już od nich nie zależy. Dokładniej, pokażemy, że jeśli  $k_{c,d}$  jest inną tak skonstruowaną ścieżką dla pewnych punktów  $0 < c < d < 1$ , to  $k_{c,d}$  jest homotopijne z  $k_{a,b}$ .

Niech  $p: I \rightarrow I$  będzie funkcją określoną tak, jak na poniższej ilustracji:



Funkcja  $p$  zwięziona do przedziałów  $[0, a]$ ,  $[a, b]$  i  $[b, 1]$ , odpowiednio, jest funkcją dodatnio liniową każdego z nich na przedziały  $[0, c]$ ,  $[c, d]$  i  $[d, 1]$ . Wobec tego  $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$ . Ponadto  $p$  jest ścieżką w  $I$  od 0 do 1, tak samo jak identyczność  $i: I \rightarrow I$ . Tym samym istnieje homotopia ścieżek  $P$  w  $I$  pomiędzy  $p$  oraz  $i$ . Zatem  $k_{c,d} \circ P$  jest homotopią ścieżek w  $X$  pomiędzy  $k_{a,b}$  oraz  $k_{c,d}$ .

Bez trudu sprawdzamy, że  $f * (g * h)$  jest równe  $k_{a,b}$  dla  $a = \frac{1}{2}$  i  $b = \frac{3}{4}$ , zaś  $(f * g) * h$  jest równe  $k_{c,d}$  dla  $c = \frac{1}{4}$  oraz  $d = \frac{1}{2}$ . Tym samym ścieżki  $f * (g * h)$  i  $(f * g) * h$  są homotopijne.  $\square$

Argument użyty w dowodzie powyższego twierdzenia przenosi się na dowolną skończoną liczbę ścieżek: podział przedziału na podprzedziały przy tworzeniu produktu ścieżek nie ma znaczenia modulo homotopia ścieżek. Sformułujmy tę obserwację jako osobne twierdzenie:

**Twierdzenie 1.5.** Niech  $f$  będzie ścieżką w  $X$  i niech  $a_0, \dots, a_n$  będą liczbami takimi, że  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ . Niech  $f_i: I \rightarrow X$  będzie ścieżką równą funkcji dodatnio liniowej przedziału  $I$  na  $[a_{i-1}, a_i]$  złożoną następnie z  $f$ . Wówczas:

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$