

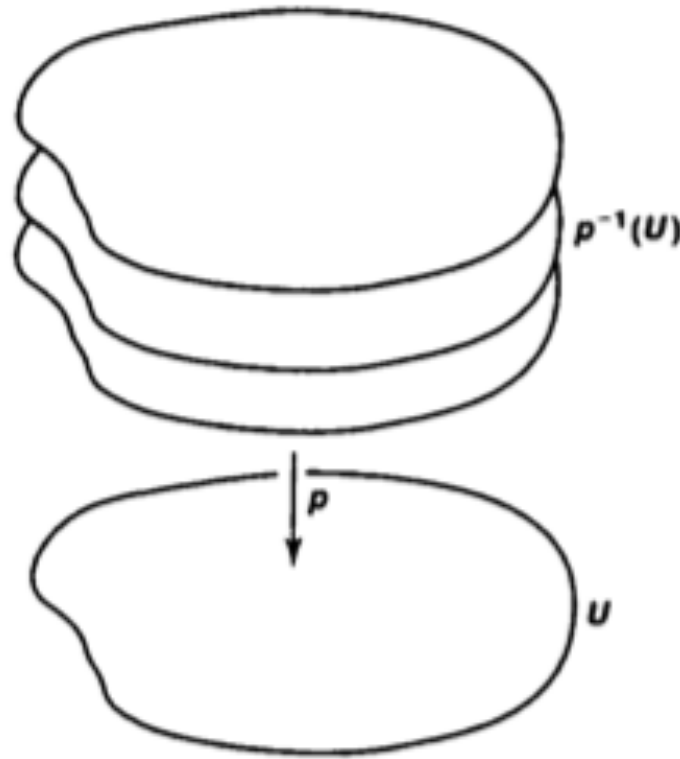
4 Przestrzenie nakrywające.

Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem ciągłym i surjektywnym.

Powiemy, że otwarty podzbiór $U \subseteq B$ jest **równo nakryty** przez p , jeżeli przeciwobraz $p^{-1}(U)$ jest rozłączną sumą zbiorów otwartych $V_\alpha \subseteq E$ o tej własności, że dla każdego α zwężenie $p|_{V_\alpha}$ jest homeomorfizmem pomiędzy V_α a U .

Rodzinę $\{V_\alpha\}$ będziemy nazywali podziałem $p^{-1}(U)$ na **plastry**.

Jeśli U jest zbiorem otwartym równo nakrytym przez p , to często będziemy wyobrażać sobie zbiór $p^{-1}(U)$ jako stos „naleśników” szybujących w powietrzu nad zbiorem U , z których każdy jest tego samego kształtu i rozmiaru, co zbiór U :



Zauważmy, że jeśli U jest zbiorem równo nakrytym przez p oraz $W \subseteq U$ jest zbiorem otwartym zawartym w U , to również W jest równo nakryty przez p .

Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem ciągłym i surjektywnym.

Jeżeli każdy punkt $b \in B$ ma otoczenie U które jest równo nakryte przez p , to p nazywamy **odwzorowaniem nakrywającym**, zaś E **przestrzenią nakrywającą**.

Zauważmy, że jeśli $p: E \rightarrow B$ jest odwzorowaniem nakrywającym, to dla każdego $b \in B$ podprzestrzeń $p^{-1}(b)$ przestrzeni E wyposażona jest w topologię dyskretną: istotnie, każdy plaster V_α jest zbiorem otwartym w E i przecina się ze zbiorem $p^{-1}(b)$ w jednym punkcie, a natem punkt ten jest zbiorem otwartym w przestrzeni $p^{-1}(b)$.

Zauważmy ponadto, że jeśli $p: E \rightarrow B$ jest odwzorowaniem nakrywającym, to jest też odwzorowaniem otwartym.

Istotnie, załóżmy, że A jest zbiorem otwartym w E .

Dla ustalonego $x \in p(A)$ wybierzmy otoczenie U punktu x , które jest równo nakryte przez p .

Niech $\{V_\alpha\}$ będzie podziałem $p^{-1}(U)$ na plastry.

Wówczas istnieje punkt $y \in A$ taki, że $p(y) = x$.

Niech V_β będzie plastrem zawierającym punkt y .

Zbiór $V_\beta \cap A$ jest otwarty w E , a więc otwarty w V_β .

Ponieważ p odwzorowuje V_β homeomorficznie na U , zatem $p(V_\beta \cap A)$ jest otwarty w U , a więc otwarty w B .

Tym samym wskazaliśmy otwarte otoczenie punktu x zawarte w $p(A)$, co dowodzi, że $p(A)$ jest otwarty.

Przykład 4.1.

Niech X będzie dowolną przestrzenią, niech $i: X \rightarrow X$ oznacza odwzorowanie identycznościowe.

Wówczas i jest odwzorowaniem nakrywającym.

Ogólniej, niech E będzie przestrzenią $X \times \{1, \dots, n\}$ składającą się z n kopii przestrzeni X .

Odwzorowanie $p: E \rightarrow X$ dane wzorem $p(x, i) = x$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ również jest odwzorowaniem nakrywającym.

Twierdzenie 4.2. *Odwzorowanie $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dane wzorem*

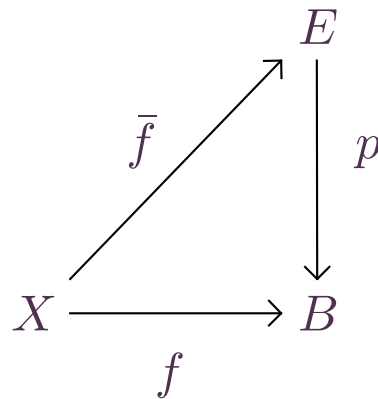
$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

jest odwzorowaniem nakrywającym.

5 Grupa fundamentalna okręgu.

Niech $p: E \rightarrow B$ będzie dowolnym odwzorowaniem.

Jeżeli $f: X \rightarrow B$ jest funkcją ciągłą, to **podniesieniem** funkcji f będziemy nazywać odwzorowanie $\bar{f}: X \rightarrow E$ takie, że $p \circ \bar{f} = f$:



Przykład 5.1. Rozważmy odwzorowanie nakrywające $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ z Twierdzenia 4.2.

Ścieżka $f: I \rightarrow S^1$ zaczynająca się w punkcie $b_0 = (1, 0)$ dana wzorem

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$$

podnosi się do ścieżki $\bar{f}(s) = \frac{s}{2}$ łączącej punkty 0 i $\frac{1}{2}$.

Ścieżka $g: I \rightarrow S^1$ zaczynająca się w b_0 dana wzorem

$$g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$$

podnosi się do ścieżki $\bar{g}(s) = -\frac{s}{2}$ łączącej punkty 0 i $-\frac{1}{2}$.

Ścieżka $h: I \rightarrow S^1$ zaczynająca się w b_0 dana wzorem

$$h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$$

podnosi się do ścieżki $\bar{h}(s) = 2s$ łączącej punkty 0 i 2.

Lemat 5.2. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym, niech $p(e_0) = b_0$. Dowolna ścieżka $f: I \rightarrow B$ zaczynająca się w b_0 podnosi się do dokładnie jednej ścieżki $\bar{f}$ w E zaczynającej się w e_0 .

Lemat 5.3. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym, niech $p(e_0) = b_0$ i niech $F: I \times I \rightarrow B$ będzie funkcją ciągłą taką, że $F(0, 0) = b_0$. Wówczas istnieje dokładnie jedno podniesienie funkcji F do ciągłego odwzorowania $\bar{F}: I \times I \rightarrow E$ takiego, że $\bar{F}(0, 0) = e_0$. Jeżeli F jest homotopią ścieżek, to jest nią też $\bar{F}$.

Twierdzenie 5.4. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym i niech $p(e_0) = b_0$. Niech ponadto f i g będą dwiema ścieżkami w B od b_0 do b_1 , zaś $\bar{f}$ i $\bar{g}$ niech będą ich podniesieniami w E rozpoczynającymi się w e_0 . Jeśli istnieje homotopia ścieżek pomiędzy f i g , to $\bar{f}$ i $\bar{g}$ kończą się w tym samym punkcie i istnieje homotopia ścieżek pomiędzy nimi.

Niech zatem $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym i niech $b_0 \in B$.

Wyberzmy $e_0 \in E$ tak, aby $p(e_0) = b_0$.

Dla danego elementu $[f]$ grupy $\pi_1(B, b_0)$ niech $\bar{f}$ będzie podniesieniem f do ścieżki w E zaczynającej się w e_0 .

Niech $\varphi([f])$ oznacza punkt końcowy $\bar{f}(1)$ ścieżki $\bar{f}$.

W świetle powyższego Twierdzenia φ jest dobrze określoną funkcją

$$\varphi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

Będziemy nazywać φ **odpowiedniością podniesień** indukowaną przez odwzorowanie nakrywające p .

Oczywiście φ zależy od wyboru punktu e_0 .

Twierdzenie 5.5. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie odwzorowaniem nakrywającym i niech $p(e_0) = b_0$.
Jeśli E jest łukowo spójna, to wtedy odpowiedność podniesień

$$\varphi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

jest surjektywna. Jeśli E jest jednospójna, to φ jest bijekcją.

Twierdzenie 5.6. *Grupa fundamentalna S^1 jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}$.*