

2 Grupa fundamentalna.

Jeżeli wybierzemy w X „punkt bazowy” x_0 i ograniczymy się do klas ścieżek, które zaczynają się i kończą się w tym punkcie – będziemy je nazywać **pętlami** – otrzymamy grupę, którą będziemy nazywać **grupą fundamentalną** przestrzeni X **względem punktu** x_0 (albo **pierwszą grupą homotopii** przestrzeni X) i oznaczać $\pi_1(X, x_0)$.

Przykład 2.1. $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ jest grupą trywialną.

Ogólniej, jeżeli X jest dowolnym podzbiorem wypukłym przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to $\pi_1(X, x_0)$ jest grupą trywialną.

W szczególności **kula jednostkowa**

$$B^n = \{\boldsymbol{x} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

ma trywialną grupę fundamentalną.

W jakim stopniu $\pi_1(X, x_0)$ zależy od wyboru punktu x_0 ?

Niech α będzie ścieżką w X od x_0 do x_1 .

Zdefiniujmy odwzorowanie $\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ wzorem

$$\hat{\alpha}([f]) = [\alpha^{-1}] * [f] * [\alpha].$$

Twierdzenie 2.2. *Funkcja $\hat{\alpha}$ jest izomorfizmem.*

Wniosek 2.3. *Jeżeli X jest przestrzenią łukowo spójną i x_0 oraz x_1 są dowolnymi dwoma punktami w X , to $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.*

Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną.

Jeżeli C oznacza składową łukowo spójną przestrzeni X zawierającą punkt x_0 , to $\pi_1(C, c_0) \cong \pi_1(X, x_0)$, ponieważ wszystkie pętle zaczepione w x_0 i wszystkie homotopie w X zaczepione w x_0 muszą leżeć w przestrzeni C .

Tym samym $\pi_1(X, x_0)$ zależy wyłącznie od składowej łukowo spójnej X zawierającej x_0 i nie daje żadnej informacji o tym, co się dzieje w pozostałej części przestrzeni X .

Z tego względu na ogół będziemy zakładać, że przestrzenie, których grupy fundamentalne będziemy badać, są łukowo spójne.

Jeśli X jest łukowo spójna, to wszystkie grupy $\pi_1(X, x)$ są izomorficzne.

Nie ma naturalnego sposobu utożsamiania ze sobą grup $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ dla różnych punktów x_0 i x_1 : dwie różne ścieżki α i β z x_0 do x_1 indukują dwa różne izomorfizmy $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$.

Przestrzeń X będziemy nazywać **jednospójną**, jeżeli jest łukowo spójna i $\pi_1(X, x_0)$ jest grupą trywialną dla pewnego $x_0 \in X$, a więc dla wszystkich $x_0 \in X$.

Lemat 2.4. *W przestrzeni jednospójnej X dowolne dwie ścieżki o takich samych punktach początkowych i końcowych są homotopijne.*

Niech $h: X \rightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą, która odwzorowuje punkt $x_0 \in X$ na punkt $y_0 \in Y$:

$$h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0).$$

Jeśli f jest pętlą w X zaczepioną w x_0 , to złożenie $h \circ f: I \rightarrow Y$ jest pętlą w Y zaczepioną w y_0 .

Odpowiedniość $f \mapsto h \circ f$ ustala odwzorowanie $\pi_1(X, x_0)$ w $\pi_1(Y, y_0)$: dla $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ funkcję $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ definiujemy wzorem

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

i nazywamy **homomorfizmem indukowanym** przez h względem punktu x_0 .

Odwzorowanie h_* jest dobrze określone, albowiem jeśli F jest homotopią ścieżek pomiędzy ścieżkami f oraz f' , to $h \circ F$ jest homotopią ścieżek pomiędzy ścieżkami $h \circ f$ oraz $h \circ f'$.

To, że h_* jest homomorfizmem wynika wprost z równania:

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

Homomorfizm h_* zależy nie tylko od funkcji $h: X \rightarrow Y$, ale również od wyboru punktu x_0 .

Jeśli x_0 i x_1 będą różnymi punktami w X , nie możemy używać tego samego symbolu h_* dla dwóch różnych homomorfizmów, z których dziedziną jednego jest $\pi_1(X, x_0)$, a drugiego $\pi_1(X, x_1)$.

W takich razach będziemy pisali

$$(h_{x_0})_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

dla oznaczenia pierwszego homomorfizmu oraz $(h_{x_1})_*$ dla oznaczenia drugiego.

Twierdzenie 2.5. *Jeśli $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ oraz $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ są funkcjami ciągłymi, to*

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

Jeśli $i: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ jest odwzorowaniem identycznościowym, to i_ jest homomorfizmem identycznościowym.*

Wniosek 2.6. Niech $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ będzie homeomorfizmem. Wówczas $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ jest izomorfizmem.

3 Wyższe grupy homotopii.

Dla przestrzeni topologicznej X z wybranym „punktem bazowym” x_0 rozważamy zbiór $\pi_n(X, x_0)$ klas $[f]$ homotopii funkcji $f: I^n \rightarrow X$, które odwzorowują brzeg „sześcianu” I^n na punkt bazowy x_0 .

Pojęcie produktu (klas) ścieżek uogólniamy na wyższy wymiar następująco: dziedziną produktu dalej powinien być „sześcian” I^n , musimy zatem „skleić” dwie funkcje $f, g: I^n \rightarrow X$ wzdłuż jednej ze ścian I^n :

$$f * g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{gdy } x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & \text{gdy } x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

* indukuje działanie na klasach homotopii, które określa strukturę grupy $\pi_n(X, x_0)$.