

1 Homotopijność ścieżek.

Tu i w dalszej części wykładu przyjmijmy oznaczenie $I = [0, 1]$.

Jeśli f i f' są przekształceniami ciągłymi z przestrzeni X do Y to powiemy, że są **homotopijne**, jeżeli istnieje przekształcenie ciągłe $F: X \times I \rightarrow Y$ takie, że

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{oraz} \quad F(x, 1) = f'(x),$$

dla wszystkich $x \in X$.

Odwzorowanie F nazywamy **homotopią** pomiędzy f i f' . Jeżeli f jest homotopijne do f' , to piszemy $f \simeq f'$.

Jeżeli $f \simeq f'$ oraz f' jest odwzorowaniem stałym, to mówimy, że f jest **nulhomotopijne**.

Jako **ścieżkę** od punktu x_0 do x_1 rozumiemy odwzorowanie ciągłe $f: I \rightarrow X$ takie, że $f(0) = x_0$ oraz $f(1) = x_1$.

Punkt x_0 nazywamy **początkiem ścieżki**, zaś punkt x_1 **końcem ścieżki**.

Pomiędzy ścieżkami f i f' definiujemy relację **homotopijności ścieżek**, oznaczaną przez $f \simeq_p f'$ następująco: będziemy wymagali, aby ścieżki f i f' w przestrzeni X :

- i. były homotopijne, a więc aby istniała między nimi homotopia $F: I \times I \rightarrow X$;
- ii. miały takie same początki x_0 i końce x_1 ;
- iii. $F(0, t) = x_0$ oraz $F(1, t) = x_1$, dla $t \in I$.

Homotopię F będziemy nazywali **homotopią ścieżek**.

Lemat 1.1. Relacje $\simeq$ i $\simeq_p$ są równoważnościami. Klasę abstrakcji ścieżki f względem relacji $\simeq_p$ będziemy oznaczali przez $[f]$.

Przykład 1.2. Niech f i g będą dowolnymi funkcjami ciągłymi z przestrzeni X do $\mathbb{R}^2$.

Wówczas f i g są homotopijne.

Ogólniej, jeżeli A będzie dowolną podprzestrzenią **wypukłą** $\mathbb{R}^n$ (a więc taką, że dla dowolnych punktów $a, b \in A$ do A należy też dowolny odcinek łączący a i b), to dowolne dwie ścieżki f i g w A od x_0 do x_1 będą homotopijne: obraz homotopii prostoliniowej F pomiędzy f i g będzie zawarty w A .

Jeżeli f jest ścieżką w X z x_0 do x_1 , zaś g jest ścieżką w X z x_1 do x_2 , to **produktem** $f * g$ nazywamy ścieżkę z x_0 do x_2 określoną wzorem

$$f * g(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{gdy } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2x - 1), & \text{gdy } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Uwaga 1.3. Produkt ścieżek indukuje dobrze określone działanie częściowe na klasach abstrakcji relacji $\simeq_p$:

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Twierdzenie 1.4. Zbiór klas abstrakcji relacji $\simeq_p$ z działaniem $*$ jest grupoidem.

Jeżeli f jest ścieżką od x_0 do x_1 , zaś dla $x \in X$ odwzorowanie $e_x: I \rightarrow X$ oznacza funkcję stałą równą x , to $[e_{x_1}]$ jest prawo- a $[e_{x_0}]$ lewostronną identycznością dla $[f]$.

Dla danej ścieżki f z x_0 do x_1 f^{-1} oznacza ścieżkę odwrotną z x_1 do x_0 daną wzorem

$$f^{-1}(x) = f(1 - x), \quad \text{dla } x \in I.$$

Twierdzenie 1.5. Niech f będzie ścieżką w X i niech $a_0, \dots, a_n$ będą liczbami takimi, że $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Niech $f_i: I \rightarrow X$ będzie ścieżką równą funkcji dodatnio liniowej przedziału I na $[a_{i-1}, a_i]$ złożoną następnie z f . Wówczas:

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$