

1. WYKŁAD 1: GRUPY I IZOMORFIZMY GRUP. PODGRUPY, PODGRUPY GENEROWANE PRZEZ ZBIÓR.

1.1. Grupy i izomorfizmy grup.

Definicja 1.1. Niech A będzie niepustym zbiorem. **Działaniem wewnętrznym** (lub, krótko, działaniem) w zbiorze A nazywamy funkcję $*$: $A \times A \rightarrow A$. Niech ponadto B będzie niepustym zbiorem. **Działaniem zewnętrznym** w zbiorze A nazywamy funkcję $*$: $B \times A \rightarrow A$.

Uwaga 1.1. To, że w zbiorze A określono działanie wewnętrzne $*$ w szczególności oznacza, że:

- (1) $\forall x, y \in A [*(x, y) \text{ istnieje}]$,
- (2) $\forall x, y \in A [*(x, y) \in A]$.

Zamiast $*(x, y)$ będziemy na ogół pisać $x * y$. Podobnie, jeśli $B \neq \emptyset$, to to, że w zbiorze A określono działanie zewnętrzne $\diamond$ w szczególności oznacza, że:

- (1) $\forall a \in B \forall x \in A [\diamond(a, x) \text{ istnieje}]$,
- (2) $\forall a \in B \forall x \in A [\diamond(a, x) \in A]$.

Zamiast $\diamond(a, x)$ będziemy na ogół pisać $a \diamond x$. Na tym wykładzie będziemy zajmować się prawie wyłącznie działaniami wewnętrznymi.

Przykłady:

- (1) Dodawanie liczb naturalnych jest działaniem w zbiorze $\mathbb{N}$. Zauważmy, że dodawanie możemy formalnie zdefiniować rekurencyjnie jako funkcję $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ warunkiem:

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, 0) = x \\ d(x, S(y)) = S(d(x, y)), \end{cases}$$

gdzie $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ oznacza funkcję następnika liczb naturalnych. Symbol “+” dla oznaczenia dodawania wprowadził w 1489 roku Johannes Widmann.

- (2) Mnożenie liczb naturalnych jest działaniem w zbiorze $\mathbb{N}$. Podobnie jak dodawanie, mnożenie możemy zdefiniować rekurencyjnie jako funkcję $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ daną warunkiem:

$$m(x, y) = \begin{cases} m(x, 0) = 0, \\ m(x, S(y)) = m(x, y) + x, \end{cases}$$

gdzie, jak poprzednio, $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ oznacza funkcję następnika liczb naturalnych. Znak “ $\times$ ” dla oznaczenia mnożenia wprowadził w 1631 roku William Oughtred, zaś symbol “ $\cdot$ ” zaproponował Gottfried Wilhelm von Leibniz w roku 1698.

- (3) Odejmowanie i dzielenie nie są działaniami w zbiorze $\mathbb{N}$: $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ oraz $1 \div 2 \notin \mathbb{N}$. Z drugiej strony, odejmowanie jest działaniem w $\mathbb{Z}$, a dzielenie jest działaniem w $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- (4) Mnożenie wektorów na płaszczyźnie przez skalary rzeczywiste jest przykładem działania zewnętrznego.

Definicja 1.2. Niech A będzie niepustym zbiorem, $a * i$ o działaniami w A .

- (1) Mówimy, że $*$ jest **łącznie**, jeżeli

$$\forall x, y, z \in A [x * (y * z) = (x * y) * z].$$

- (2) Mówimy, że $*$ jest **przemienne**, jeżeli

$$\forall x, y \in A [x * y = y * x].$$

- (3) Mówimy, że $*$ ma **element neutralny** e , jeżeli

$$\forall x \in A [x * e = e * x = x].$$

- (4) Mówimy, że y jest **elementem odwrotnym** do x , jeżeli

$$x * y = y * x = e.$$

- (5) Mówimy, że $\circ$ jest **rozdzielne** względem $*$, jeżeli

$$\forall x, y, z \in A [x \circ (y * z) = x \circ y * x \circ z].$$

Przykłady:

- (5) Dodawanie i mnożenie liczb naturalnych są łączne i przemienne. 0 jest elementem neutralnym dodawania, a 1 jest elementem neutralnym mnożenia. Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. 1 nie ma elementu odwrotnego względem dodawania, a 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.
- (6) Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb całkowitych. Każda liczba całkowita ma element odwrotny względem dodawania, ale 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.
- (7) Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb wymiernych. Każda liczba wymierna ma element odwrotny względem dodawania i każda niezerowa liczba wymierna ma element odwrotny względem mnożenia.
- (8) Rozważmy dowolny niepusty zbiór X i rodzinę A wszystkich funkcji $f : X \rightarrow X$ oraz działanie składania funkcji. Jest to działanie łączne, ale nie jest przemienne. Funkcja identycznościowa $X \ni x \mapsto x \in X$ jest elementem neutralnym tego działania, a jedyne funkcje, które mają elementy odwrotne, to funkcje różnowartościowe.

Definicja 1.3. (1) **Algebrą** nazywamy ciąg $(A, *_1, \dots, *_n, B_1, \dots, B_m, \cdot_1, \dots, \cdot_m)$, gdzie A jest niepustym zbiorem, $*_1, \dots, *_n$ działaniami wewnętrznymi w zbiorze A , a $\cdot_1, \dots, \cdot_m$ działaniami zewnętrznymi w zbiorze A (wraz z odpowiadającymi im zbiorami $B_1, \dots, B_m$).

- (2) **Grupą** nazywamy algebrę $(G, *)$, gdzie $*$ jest łączne, ma element neutralny i każdy element w zbiorze G ma element odwrotny. Jeżeli ponadto $*$ jest przemienne, to grupę $(G, *)$ nazywamy **przemienną** (lub **abelową**).

Przykłady:

- (9) Przykładami algebr znanymi z wykładu z algebry liniowej są ciała, czyli algebry $(F, +, \cdot)$, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami łącznymi, przemiennymi, mającymi elementy neutralne, odpowiednio, 0 i 1 oraz takie, że każdy element zbiorów, odpowiednio, F i F^* ma element odwrotny.
Przykładami algebr, w których występują działania zewnętrzne, są przestrzenie liniowe, czyli algebry $(V, +, F, \cdot)$, gdzie $+$ jest działaniem wewnętrznym zbioru F , które jest łączne, przemienne, ma element neutralny i względem którego każdy element zbioru V ma element odwrotny, natomiast $\cdot : F \times V \rightarrow V$ jest pewnym działaniem zewnętrznym, przy czym F jest ciałem.
- (10) **Grupy liczbowe.** $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ są przykładami grup przemiennych. $(\mathbb{N}, +)$ nie jest grupą. Podobnie $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, gdzie $A^* = A \setminus \{0\}$, są grupami przemiennymi. $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ i $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ nie są grupami.
- (11) **Grupy pochodzące od ciała.** Uogólniając poprzedni przykład, dla dowolnego ciała $(F, +, \cdot)$ algebry $(F, +)$ oraz $(F^*, \cdot)$ są grupami przemiennymi.
- (12) **Grupy reszt.** Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy przez $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n$ definiujemy **dodawanie modulo n** :

$$x \oplus_n y = \text{reszta z dzielenia } x + y \text{ przez } n$$

oraz **mnożenie modulo n** :

$$x \otimes_n y = \text{reszta z dzielenia } x \cdot y \text{ przez } n.$$

Niech ponadto

$$U(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n : \text{NWD}(k, n) = 1\}.$$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus_n)$ i $(U(\mathbb{Z}_n), \otimes_n)$ są przykładami grup przemennych. $(\mathbb{Z}_n^*, \otimes_n)$ na ogół nie jest grupą, chyba że n jest liczbą pierwszą – wówczas $\mathbb{Z}_n^* = U(\mathbb{Z}_n)$.

- (13) **Grupy macierzy.** Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $M(n, F)$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała F . $(M(n, F), +)$ jest grupą przemenną, przy czym $+$ oznacza tu dodawanie macierzy.

Niech

$$GL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A \neq 0\}.$$

$(GL(n, F), \cdot)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienią, przy czym $\cdot$ oznacza tu mnożenie macierzy. Grupę tę nazywamy **grupą liniową stopnia n nad ciałem F** .

Niech

$$SL(n, F) = \{A \in M(n, F) : \det A = 1\}.$$

$(SL(n, F), \cdot)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienią. Grupę tę nazywamy **specjalną grupą liniową stopnia n nad ciałem F** .

- (14) **Grupy związane z przestrzenią liniową.** Niech V będzie przestrzenią liniową. $(V, +)$ jest grupą przemenną, przy czym $+$ oznacza tu dodawanie wektorów.

Oznaczmy przez $\text{Aut}(V)$ zbiór automorfizmów liniowych przestrzeni V . $(\text{Aut}(V), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienią, przy czym $\circ$ jest tu działaniem składania przekształceń liniowych.

Założmy, że w przestrzeni V zdefiniowaliśmy funkcjonal dwuliniowy ξ określający na V strukturę przestrzeni euklidesowej. Oznaczmy przez $O(V)$ zbiór automorfizmów ortogonalnych przestrzeni V . $(O(V), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienią. Grupę tę nazywamy **grupą ortogonalną przestrzeni (V, ξ)** .

- (15) **Grupy funkcji.** Niech $(G, *)$ będzie grupą, niech $X \neq \emptyset$. W rodzinie funkcji

$$G^X = \{f : X \rightarrow G : f \text{ jest funkcją}\}$$

definiujemy działanie

$$(f \diamond g)(x) = f(x) * g(x).$$

$(G^X, \diamond)$ jest grupą, która jest przemienią, gdy G jest przemienią.

- (16) **Grupy zadane tabelkami Cayleya.** Działania w grupach często wygodnie jest zapisywać w tabelkach Cayleya. Na przykład tabela działań w grupie $(\mathbb{Z}_5^*, \otimes_5)$ wygląda następująco:

$\otimes_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Przykładem grupy zadanej przez tabelkę Cayleya, która nie ma odpowiednika wśród grup liczbowych, jest **grupa czwórkowa Kleina** $(K_4, \cdot)$, gdzie $K_4 = \{a, b, c, d\}$ oraz działanie $\cdot$ zdefiniowane

jest następująco:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(17) **Grupy przekształceń.** Niech $X \neq \emptyset$, niech

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ jest bijekcją}\}.$$

$(S(X), \circ)$ jest grupą, która na ogół nie jest przemienna, przy czym $\circ$ oznacza tu działanie składania funkcji. Jeśli $X = \{1, 2, \dots, n\}$, to grupę $S(X)$ oznaczamy przez $S(n)$ i nazywamy **grupą symetryczną stopnia n** albo **grupą permutacji stopnia n** . Dla grup symetrycznych przyjmujemy następującą notację: jeśli $\sigma \in S(n)$ i $\sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(n) = i_n$, to piszemy

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Na przykład dla $n = 3$ elementy grupy $S(3)$ to następujące funkcje:

$$\begin{array}{ll} id_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & o_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & o_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ s_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & s_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & s_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Tym samym tabelka działań w grupie $S(3)$ wygląda następująco:

$\circ$	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
id_3	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
o_1	o_1	o_2	id_3	s_2	s_3	s_1
o_2	o_2	id_3	o_1	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	id_3	o_2	o_1
s_2	s_2	s_1	s_3	o_1	id_3	o_2
s_3	s_3	s_2	s_1	o_2	o_1	id_3

. Widzimy, że jest to przykład grupy nieprzemiennej: $s_1 \circ o_1 = s_2$, ale $o_1 \circ s_1 = s_3$.

(18) **Grupy izometrii własnych n -kąta foremnego.** Dla $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, oznaczmy przez $D(n)$ zbiór izometrii własnych n -kąta foremnego. $(D(n), \circ)$ jest grupą. Na przykład grupa $D(3)$ składa się z

następujących izometrii trójkąta równobocznego:

$ID_3 :$

$O_1 :$

$O_2 :$

identyczność

obrót o 120°

obrót o 240°

$S_1 :$

$S_2 :$

$S_3 :$

symetria względem
symetralnej przechodzącej
przez wierzchołek 1

symetria względem
symetralnej przechodzącej
przez wierzchołek 2

symetria względem
symetralnej przechodzącej
przez wierzchołek 3

Tabela działań w grupie $D(3)$ wygląda zatem następująco:

$\circ$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
ID_3	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3
O_1	O_1	O_2	ID_3	S_2	S_3	S_1
O_2	O_2	ID_3	O_1	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	ID_3	O_2	O_1
S_2	S_2	S_1	S_3	O_1	ID_3	O_2
S_3	S_3	S_2	S_1	O_2	O_1	ID_3

- (19) **Skończony produkt grup.** Niech $(G_1, *_1), \dots, (G_n, *_n)$ będą grupami. W produkcie kartezjańskim $G = G_1 \times \dots \times G_n$ definiujemy działanie “po współrzędnych”:

$$(a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \dots, a_n *_n b_n).$$

$(G, *)$ jest grupą. Jako przykład rozważmy grupy $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$ i $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2)$. Wówczas

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

i tabela działań wygląda następująco:

$*$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$
$(1, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$
$(1, 1)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 0)$

Definicja 1.4. Niech $(G_1, *_1)$ i $(G_2, *_2)$ będą grupami. Funkcję $f : G_1 \rightarrow G_2$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeżeli jest bijekcją i spełniony jest warunek

$$\forall x, y \in G_1 [f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)].$$

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : G_1 \rightarrow G_2$, to grupy G_1 i G_2 nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $G_1 \cong G_2$.

Przykłady:

- (20) Grupy $S(3)$ i $D(3)$ są izomorficzne. Istotnie, rozważmy funkcję $f : S(3) \rightarrow D(3)$, którą, dla wygody oznaczeń, zdefiniujemy tabelką jako:

σ	id_3	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
$f(\sigma)$	ID_3	O_1	O_2	S_1	S_2	S_3

Oczywiście jest to bijekcja. Porównując tabelki działań w $S(3)$ i $D(3)$ widzimy, że jest to też izomorfizm grup.

- (21) Grupy K_4 i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ są izomorficzne. Istotnie, izomorfizm ustala funkcja $f : K_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dana tabelką

x	a	b	c	d
$f(x)$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$

W dowolnej grupie $(G, *)$ wprowadzamy oznaczenie

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 * \dots * x_n.$$

W szczególności $\prod_{i=1}^n x = x^n$. Tradycyjnie używamy w teorii grup dwóch równoległych terminologii, addytywnej i mnożymy, według następującego schematu:

Definicja	Notacja addytywna	Notacja mnożymy
działanie	$+$ dodawanie suma	$\cdot$ mnożenie iloczyn
element neutralny	0 zero	1 jedyńka
potęga	nx wielokrotność	x^n potęga
element odwrotny	$-x$ element przeciwny	x^{-1} element odwrotny

Twierdzenie 1.1. Niech $(G, *)$ będzie grupą. Wówczas:

- (1) element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie;
- (2) $\prod_{i=1}^m x_i * \prod_{j=m+1}^{m+n} x_j = \prod_{k=1}^{m+n} x_k$, dla $x_1, \dots, x_{m+n} \in G$;
- (3) $x^{m+n} = x^m x^n$, dla $x \in G$;
- (4) $(x^m)^n = x^{mn}$, dla $x \in G$;
- (5) element odwrotny jest wyznaczony jednoznacznie;
- (6) $(x_1^{n_1} * \dots * x_k^{n_k})^{-1} = x_k^{-n_k} * \dots * x_1^{-n_1}$, dla $x_1, \dots, x_k \in G$;
- (7) $(x^{-1})^{-1} = x$, dla $x \in G$;
- (8) $(x^{-1} * y * x)^n = x^{-1} * y^n * x$, dla $x, y \in G$;
- (9) jeżeli $x * y = x * z$, to $y = z$ oraz jeżeli $y * x = z * x$, to $y = z$ (**prawo skracania**).

Dowód. Udowodnimy dla przykładu część (1): jeśli e i e' są dwoma elementami neutralnymi, to wówczas

$$e = e * e' = e'$$

□