

12. WYKŁAD 12: FUNKTORY REPREZENTOWALNE

Definicja 12.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. T nazywamy funktorem reprezentowalnym jeżeli dla pewnego obiektu A w $\mathcal{C}$ istnieje naturalna równoważność α pomiędzy funktorem kowariantnym $h_A = \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$ a funktorem T . Para (A, α) jest nazywana reprezentacją T , zaś o T mówimy, że jest reprezentowany przez obiekt A .

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kontrawariantnym. T nazywamy funktorem reprezentowalnym jeżeli dla pewnego obiektu B w $\mathcal{C}$ istnieje naturalna równoważność β pomiędzy funktorem kontrawariantnym $h^B = \text{hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$ a funktorem T . Para (B, α) jest nazywana reprezentacją T , zaś o T mówimy, że jest reprezentowany przez obiekt B .

Przykłady:

- (1) Rozważmy kategorię $\mathcal{Grp}$ i kowariantny funktor zapominania $F : \mathcal{Grp} \rightarrow \mathcal{Set}$. Para $(\mathbb{Z}, \mathbf{1})$ jest reprezentacją F : dla dowolnych grup G, H i homomorfizmu $G \xrightarrow{f} H$ następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Hom}(\mathbb{Z}, H) \\ \mathbf{1}_G \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

gdzie $\bar{f}(\phi) = f \circ \phi$, dla $\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} G$, oraz $\mathbf{1}_G : \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow G$ dane wzorem

$$\mathbf{1}_G(\phi) = \phi(1), \text{ dla } \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} G,$$

jest naturalną równoważnością.

- (2) Rozważmy kategorię $\mathcal{Rng}$ i kowariantny funktor zapominania $F : \mathcal{Rng} \rightarrow \mathcal{Set}$. Para $(\mathbb{Z}[x], \mathbf{x})$ jest reprezentacją F : dla dowolnych pierścieni P, R i homomorfizmu $P \xrightarrow{f} R$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{Z}[x], P) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Hom}(\mathbb{Z}[x], R) \\ \mathbf{x}_P \downarrow & & \downarrow \mathbf{x}_R \\ P & \xrightarrow{f} & R \end{array}$$

gdzie $\bar{f}(\phi) = f \circ \phi$, dla $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{\phi} P$, oraz $\mathbf{x}_P : \text{Hom}(\mathbb{Z}[x], P) \rightarrow P$ dane wzorem

$$\mathbf{x}_P(\phi) = \phi(x), \text{ dla } \mathbb{Z}[x] \xrightarrow{\phi} P,$$

jest naturalną równoważnością.

- (3) Rozważmy kategorię $\mathbb{R} - \mathcal{Vect}$ i kowariantny funktor zapominania $F : \mathbb{R} - \mathcal{Vect} \rightarrow \mathcal{Set}$. Para $(\mathbb{R}, \mathbf{1})$ jest reprezentacją F : dla dowolnych przestrzeni wektorowych V, W i odwzorowania liniowego

$V \xrightarrow{f} W$ następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{R}, V) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Hom}(\mathbb{R}, W) \\ \downarrow \mathbf{1}_V & & \downarrow \mathbf{1}_W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

gdzie $\bar{f}(\phi) = f \circ \phi$, dla $\mathbb{R} \xrightarrow{\phi} V$, oraz $\mathbf{1}_V : \text{Hom}(\mathbb{R}, V) \rightarrow V$ dane wzorem

$$\mathbf{1}_V(\phi) = \phi(1), \text{ dla } \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} V,$$

jest naturalną równoważnością.

- (4) Rozważmy kategorię $\mathcal{Top}$ i kowariantny funktor zapominania $F : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Set}$. Para $(\{x\}, \mathbf{i})$ jest reprezentacją F : dla dowolnych przestrzeni topologicznych X, Y i odwzorowania ciągłego $X \xrightarrow{f} Y$ następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\{x\}, X) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Hom}(\{x\}, Y) \\ \downarrow \mathbf{i}_X & & \downarrow \mathbf{i}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

gdzie $\bar{f}(\phi) = f \circ \phi$, dla $\{x\} \xrightarrow{\phi} X$, oraz $\mathbf{i}_X : \text{Hom}(\{x\}, X) \rightarrow X$ dane wzorem

$$\mathbf{i}_X(\phi) = \phi(x), \text{ dla } \{x\} \xrightarrow{\phi} X,$$

jest naturalną równoważnością.

- (5) Rozważmy kategorię $\mathcal{Set}$ i kontrawariantny funktor $F : \mathcal{Set} \rightarrow \mathcal{Set}$ dany przez

$$F(A) = 2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

oraz

$$F(f)(Y) = f^{-1}(Y), Y \subseteq B,$$

dla $A \xrightarrow{f} B$. Para $(\{0, 1\}, \lambda)$ jest reprezentacją F : dla dowolnych zbiorów A, B i funkcji $A \xrightarrow{f} B$ następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, \{0, 1\}) & \xleftarrow{\bar{f}} & \text{Hom}(B, \{0, 1\}) \\ \downarrow \lambda_A & & \downarrow \lambda_B \\ 2^A & \xleftarrow{F(f)} & 2^B \end{array}$$

gdzie $\bar{f}(\phi) = \phi \circ f$, dla $B \xrightarrow{\phi} \{0, 1\}$, oraz $\lambda_A : \text{Hom}(A, \{0, 1\}) \rightarrow 2^A$ dane wzorem

$$\lambda_A(\phi) = \phi^{-1}(1), \text{ dla } A \xrightarrow{\phi} \{0, 1\},$$

jest naturalną równoważnością.

Definicja 12.2. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. Zdefiniujemy kategorię $\mathcal{C}_T$ następująco:

Obiekty: pary (C, s) , gdzie $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $s \in T(C)$;

Morfizmy: $(C, s) \xrightarrow{f} (D, t)$ jest morfizmem $C \xrightarrow{f} D$ takim, że

$$T(f)(s) = t \in T(D).$$

Obiekt początkowy w kategorii $\mathcal{C}_T$ nazywamy elementem początkowym funktora T .

Nech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kontrawariantnym. Zdefiniujemy kategorię $\mathcal{C}^T$ następująco:

Obiekty: pary (C, s) , gdzie $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $s \in T(C)$;

Morfizmy: $(C, s) \xrightarrow{f} (D, t)$ jest morfizmem $C \xrightarrow{f} D$ takim, że

$$T(f)(t) = s \in T(C).$$

Obiekt końcowy w kategorii $\mathcal{C}^T$ nazywamy elementem końcowym funktora T .

Przykłady:

(6) Rozważmy kategorię $\mathcal{Grp}$ oraz kowariantny funktor zapominania $F : \mathcal{Grp} \rightarrow \mathcal{Set}$. Wówczas $(\{1\}, 1)$ jest elementem początkowym funktora F .

(7) Rozważmy kategorię $\mathcal{Set}$ i funktor kontrawariantny $F : \mathcal{Set} \rightarrow \mathcal{Set}$ dany przez

$$F(A) = 2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

oraz

$$F(f)(Y) = f^{-1}(Y), Y \subseteq B,$$

dla $A \xrightarrow{f} B$. Wówczas $(\{x\}, x)$ jest elementem końcowym funktora F .

Lemat 12.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kowariantnym, niech $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

(1) Jeśli $\alpha : h_A \rightarrow T$ jest transformacją naturalną pomiędzy h_A oraz T i $u = \alpha_A(1_A) \in T(A)$, to, dla dowolnego obiektu $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ oraz $g \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$

$$\alpha_C(g) = T(g)(u).$$

(2) Jeśli $u \in T(A)$ i dla każdego obiektu $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ odwzorowanie $\beta_C : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \rightarrow T(C)$ zdefiniowane jest wzorem $g \mapsto T(g)(u)$, to $\beta : h_A \rightarrow T$ jest naturalną transformacją taką, że $\beta_A(1_A) = u$.

Dowód. (1) Niech C będzie obiektem $\mathcal{C}$ i niech $g \in \text{Hom}(A, C)$. Wobec naszych założeń, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\bar{g}} & \text{Hom}(A, C) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_C \\ T(A) & \xrightarrow{T(g)} & T(C) \end{array}$$

gdzie $\bar{g}(\phi) = g \circ \phi$, dla $A \xrightarrow{\phi} A$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\alpha_C(g) &= \alpha_C(g \circ 1_A) = \alpha_C[h_A(g)(1_A)] \\ &= [\alpha_C h_A(g)](1_A) = (T(g)\alpha_A)(1_A) = T(g)[\alpha_A(1_A)] \\ &= T(g)(u)\end{aligned}$$

(2) Chcemy pokazać, że dla dowolnego morfizmu $B \xrightarrow{k} C$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\bar{k}} & \text{Hom}(A, C) \\ \beta_B \downarrow & & \downarrow \beta_C \\ T(B) & \xrightarrow{T(k)} & T(C) \end{array}$$

gdzie $\bar{k}(\phi) = k \circ \phi$, dla $A \xrightarrow{\phi} B$. Istotnie, dla dowolnego $A \xrightarrow{f} B$

$$\begin{aligned}[\beta_C h_A(k)](f) &= \beta_C(k \circ f) = T(k \circ f)(u) = [T(k)T(f)](u) \\ &= T(k)[T(f)(u)] = T(k)[\beta_B(f)] \\ &= [T(k)\beta_B](f).\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\beta_A(1_A) = T(1_A)(u) = 1_{T(A)}(u) = u.$$

□

Twierdzenie 12.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. Wówczas istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy klasą X wszystkich reprezentacji funktora T i klasą Y wszystkich elementów początkowych funktora T dana wzorem

$$(A, \alpha) \mapsto (A, \alpha_A(1_A)).$$

Dowód. Niech (A, α) będzie reprezentacją funktora T i niech $\alpha_A(1_A) = u \in T(A)$. Przypuśćmy, że (B, s) jest obiektem kategorii $\mathcal{C}_T$. Wobec założeń, $\alpha_A(B) = \text{Hom}(A, B) \rightarrow T(B)$ jest bijekcją, a zatem $s = \alpha_B(f)$ dla jednoznacznie wyznaczonego morfizmu $A \xrightarrow{f} B$. Wobec Lematu 12.1, $T(f)(u) = \alpha_B(f) = s$. Tym samym f jest morfizmem w kategorii $\mathcal{C}_T$ z (A, u) do (B, s) . Jeśli g jest innym takim morfizmem, to $g \in \text{Hom}(A, B)$ oraz $T(g)(u) = s$. W rezultacie, wobec Lematu 12.1, $\alpha_B(g) = T(g)(u) = s = \alpha_B(f)$. Jako że α_B jest bijekcją, $f = g$. Tym samym f jest jednoznacznie wyznaczonym morfizmem $\mathcal{C}_T$ z (A, u) do (B, s) tak, więc (A, u) jest obiektem początkowym w kategorii $\mathcal{C}_T$. Tym samym (A, u) jest elementem początkowym funktora T .

Na odwrót, załóżmy, że (A, u) jest elementem początkowym funktora T . Niech $\beta : h_A \rightarrow T$ będzie transformacją naturalną zdefiniowaną w Lemacie 12.1.(2) taką, że, dla dowolnego $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\beta_C : \text{Hom}(A, C) \rightarrow T(C)$ jest dane przez $\beta_C(f) = T(f)(u)$. Jeśli $s \in T(C)$, to wówczas (C, s) jest obiektem kategorii $\mathcal{C}_T$. Ponieważ (A, u) jest obiektem początkowym w $\mathcal{C}_T$, istnieje $f \in \text{Hom}(A, C)$ takie, że $s = T(f)(u) = \beta_C(f)$. Tym samym β_C jest surjekcją. Jeśli $\beta_C(f_1) = \beta_C(f_2)$, to wówczas $T(f_1)(u) = \beta_C(f_1) = \beta_C(f_2) = T(f_2)(u)$. Ponieważ (A, u) jest początkowy, $f_1 = f_2$. Tym samym każdy β_C jest injekcją, a więc i bijekcją. Wobec tego β jest naturalną równoważnością, czyli (A, β) jest reprezentacją funktora T .

Pozostaje sprawdzić, że $\phi\psi = 1_Y$ oraz $\psi\phi = 1_X$, gdzie $\phi : X \rightarrow Y$ jest dane przez $(A, \alpha) \mapsto (A, \alpha_A(1_A))$ oraz $\psi : Y \rightarrow X$ przez $(A, u) \mapsto (A, \beta)$, gdzie β jest zdefiniowane jak powyżej. Wynika to wprost z Lematu 12.1. $\square$

Wniosek 12.1. *Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kowariantnym. Jeśli (A, α) oraz (B, β) są reprezentacjami funktora T , to wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony morfizm $f : A \rightarrow B$ taki, że następujący diagram jest przemienny dla dowolnych $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$:*

$$\begin{array}{ccc} h_B(C) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & & \\ \downarrow \text{hom}(f, 1_C) & \searrow \beta_C & \\ & & T(C) \\ & \nearrow \alpha_C & \\ h_A(C) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & & \end{array}$$

Dowód. Niech $u = \alpha_A(1_A)$ oraz $v = \beta_B(1_B)$. Wobec Twierdzenia 12.1 (A, u) oraz (B, v) są elementami początkowymi funktora T , a zatem istnieje jednoznacznie wyznaczony izomorfizm $f : A \rightarrow B$ w $\mathcal{C}$ taki, że $T(f)(u) = v$. Wobec Lematu 12.1, dla dowolnego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ oraz $B \xrightarrow{g} C$:

$$\begin{aligned} [\alpha_C \text{hom}(f, 1_C)](g) &= \alpha_C(g \circ f) = T(g \circ f)(u) \\ &= [T(g)T(f)](u) = T(g)[T(f)(u)] = T(g)(v) \\ &= \beta_C(g) \end{aligned}$$

a zatem pożądaný diagram jest przemienny. Jeśli $f_1 : A \rightarrow B$ jest innym morfizmem, dla którego powyższy diagram jest przemienny, to, przyjmując $C = B$ oraz $g = 1_B$, otrzymujemy:

$$T(f_1)(u) = \alpha_B(f_1) = \alpha_B(1_B \circ f_1) = \alpha_B[\text{hom}(f_1, 1_B)(1_B)] = \beta_B(1_B) = v,$$

a więc $f_1 = f$. $\square$

Wniosek 12.2 (lemat Yonedy). *Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ będzie funktorem kowariantnym, niech $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Wówczas istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorem $T(A)$ i zbiorem $\text{Nat}(h_A, T)$ wszystkich transformacji naturalnych pomiędzy kowariantnym funktorem h_A a funktorem T . Bijekcja ta jest naturalna w A oraz T .*

Dowód. Zdefiniujemy funkcję $\Psi = \Psi_A : \text{Nat}(h_A, T) \rightarrow T(A)$ wzorem

$$\alpha \mapsto \alpha_A(1_A) \in T(A)$$

oraz funkcję $\Phi : T(A) \rightarrow \text{Nat}(h_A, T)$ wzorem

$$u \mapsto \beta,$$

gdzie β jest transformacją naturalną zdefiniowaną przez Lemat 12.1. Bez trudu sprawdzamy, że $\Psi\Phi$ oraz $\Phi\Psi$ są odwzorowaniami identycznościowymi, a więc Ψ_A jest bijekcją.

Ponadto diagramy

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_A, T) & \xrightarrow{N^*(f)} & \text{Nat}(h_B, T) \\ \Psi_A \downarrow & & \downarrow \Psi_B \\ T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(h_A, T) & \xrightarrow{N_*(\alpha)} & \text{Nat}(h_A, S) \\ \Psi_A \downarrow & & \downarrow \Psi_B \\ T(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & S(A) \end{array}$$

są przemienne, gdzie $A \xrightarrow{f} B$ jest dowolnym morfizmem w $\mathcal{C}$, $\alpha : T \rightarrow S$ jest transformacją naturalną funktorów, oraz $N^*(f)$ i $N_*(\alpha)$ są zdefiniowane następująco: dla dowolnego $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ oraz $\beta \in \text{Nat}(h_A, T)$, $N^*(f)(\beta)_C : h_B(C) = \text{Hom}(B, C) \rightarrow T(C)$ jest dany przez

$$g \mapsto \beta_C(g \circ f),$$

oraz $N_*(\alpha) : \text{Nat}(h_A, T) \rightarrow \text{Nat}(h_A, S)$ jest dany przez

$$\beta \mapsto \alpha\beta.$$

□