

Funktory i transformacja naturalna funktorów

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami. Funktorem kowariantnym $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nazywamy parę odwzorowań (F_1, F_2) ,
 $F_1 : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{D})$, $F_2 : Ar(\mathcal{C}) \rightarrow Ar(\mathcal{D})$ takich, że

1. dla $A \in Ob(\mathcal{C})$ i dla $B = F_1(A) \in Ob(\mathcal{D})$

$$F_2(1_A) = 1_B;$$

2. dla $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$

$$F_1(A) \xrightarrow{F_2(f)} F_1(B);$$

3. dla $B \xrightarrow{f} C$, $A \xrightarrow{g} B$, $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$:

$$F_2(f \circ g) = F_2(f) \circ F_1(g)$$

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami. Funktorem kontrawariantnym $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nazywamy parę odwzorowań (F_1, F_2) ,
 $F_1 : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{D})$, $F_2 : Ar(\mathcal{C}) \rightarrow Ar(\mathcal{D})$ takich, że

1. dla $A \in Ob(\mathcal{C})$ i dla $B = F_1(A) \in Ob(\mathcal{D})$

$$F_2(1_A) = 1_B;$$

2. dla $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$

$$F_1(B) \xrightarrow{F_2(f)} F_1(A);$$

3. dla $B \xrightarrow{f} C$, $A \xrightarrow{g} B$, $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$:

$$F_2(f \circ g) = F_2(g) \circ F_1(f)$$

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami, niech $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ będą funktorami kowariantnymi. Transformacją naturalną α pomiędzy F i G nazywamy klasę morfizmów $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ taką, że dla każdego $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f).$$

Innymi słowy taką, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Jeżeli wszystkie α_A są izomorfizmami, to mówimy, że α jest naturalną równoważnością.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami, niech $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ będą funktorami kontrawariantnymi. Transformacją naturalną α pomiędzy F i G nazywamy klasę morfizmów $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$, $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ taką, że dla każdego $A \xrightarrow{f} B$, $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$F(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ G(f).$$

Innymi słowy taką, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \uparrow \alpha_A & & \uparrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Jeżeli wszystkie α_A są izomorfizmami, to mówimy że α jest naturalną równoważnością.