

Morfizmy

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Obiekt I kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem początkowym** (lub **uniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $I \xrightarrow{i} C$.

Obiekt T kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem końcowym** (lub **kouniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{t} T$.

Obiekt Z kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem zerowym**, jeżeli jest równocześnie obiektem początkowym i końcowym.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $B \xrightarrow{f_i} A_i$ są morfizmami w kategorii $\mathcal{C}$, $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$g_i \circ h = f_i.$$

Wówczas produkt $\prod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt końcowy $(\prod_{i \in I} A_i, \{\pi_i : i \in I\})$ w kategorii $\mathcal{D}$.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $A_i \xrightarrow{f_i} B$ są morfizmami w kategorii $\mathcal{C}$, $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$h \circ f_i = g_i.$$

Wówczas koprodukt $\coprod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy $(\coprod_{i \in I} A_i, \{\iota_i : i \in I\})$ w kategorii $\mathcal{D}$.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$, niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary (B, g) , gdzie $g : X \rightarrow B$ są funkcjami między zbiorami, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, g), (C, h))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{\phi} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$\phi \circ g = h.$$

Wówczas F jest obiektem wolnym w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy (F, f) w kategorii $\mathcal{D}$.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech 0 będzie obiektem zerowym. Wówczas:

1. jednoznacznie wyznaczony morfizm $0 \rightarrow C$ jest monomorfizmem kategorijskim;
2. jednoznacznie wyznaczony morfizm $C \rightarrow 0$ jest epimorfizmem kategorijskim.

Definicja i uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym. Wówczas dla każdej pary obiektów $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{0_{C,D}} D$ taki, że

$$f \circ 0_{C,D} = 0_{C,E} \text{ oraz } 0_{C,D} \circ g = 0_{B,D},$$

dla dowolnych morfizmów $h \in \text{Hom}(D, E)$ oraz $g \in \text{Hom}(B, C)$. Morfizm $0_{C,D}$ nazywamy **morfizmem zerowym**.

Definicja:

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ będą morfizmami. **Ekwalizatorem** (lub **jądrem różnicy**) pary f, g nazywamy parę (E, e) złożoną z obiektu E i morfizmu $E \xrightarrow{e} C$ takich, że

1. $f \circ e = g \circ e$;
2. jeśli A jest dowolnym obiektem, a $A \xrightarrow{h} C$ jest morfizmem takim, że

$$f \circ h = g \circ h,$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $A \xrightarrow{\bar{h}} E$ taki, że

$$e \circ \bar{h} = h.$$

Innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & C & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & D \\ \uparrow \scriptstyle \bar{h} & & \nearrow \scriptstyle h & & \\ A & & & & \end{array}$$

jest przemienny.

Koekwalizatorem (lub **kojądrem różnicy**) pary f, g nazywamy parę (Q, q) złożoną z obiektu E i morfizmu $D \xrightarrow{q} Q$ takich, że

1. $q \circ f = q \circ g$;
2. jeśli F jest dowolnym obiektem, a $D \xrightarrow{k} F$ jest morfizmem takim, że

$$k \circ f = k \circ g,$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\bar{k}} F$ taki, że

$$\bar{k} \circ q = k.$$

Innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightleftharpoons[g]{f} & D & \xrightarrow{q} & Q \\ & & & \searrow k & \downarrow \bar{k} \\ & & & & F \end{array}$$

jest przemienny.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ będą morfizmami, niech (E, e) będzie ekwalizatorem, a (Q, q) koekwalizatorem pary f, g . Wówczas:

1. e jest monomorfizmem kategorijskim;
2. q jest epimorfizmem kategorijskim.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. **Jądrem** morfizmu f nazywamy ekwalizator (E, e) pary $f, 0_{C,D}$.

Ekwalizator (E, e) oznaczamy wówczas $(\text{Ker } f, \ker f)$.

Kojądrem morfizmu f nazywamy koekwalizator (Q, q) pary $f, 0_{C,D}$. Koekwalizator (Q, q) oznaczamy wówczas $(\text{Coker } f, \text{coker } f)$.

Wniosek

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Wówczas:

1. $\ker f$ jest monomorfizmem oraz $f \circ \ker f = 0_{\text{Ker } f, D}$;
2. $\text{coker } f$ jest epimorfizmem oraz $\text{coker } f \circ f = 0_{C, \text{Coker } f}$.

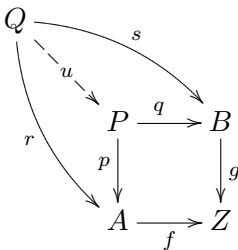
Definicja:

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $A, B, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Niech $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ będą morfizmami. **Pulbakiem** (lub **produktem włóknistym** albo **kwadratem kartezjańskim**) pary f, g nazywamy trójkę (P, p, q) złożoną z obiektu P oraz morfizmów $P \xrightarrow{p} A$ oraz $P \xrightarrow{q} B$ takich, że:

1. $f \circ p = g \circ q$;
2. dla dowolnego obiektu Q wraz z morfizmami $Q \xrightarrow{r} A$ oraz $Q \xrightarrow{s} B$ takimi, że $f \circ r = g \circ s$, istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{u} P$ taki, że $r = p \circ u$ oraz $s = q \circ u$;

innymi słowy następujący diagram:

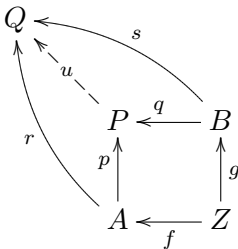


jest przemienny. Obiekt P oznaczamy przez $A \times_Z B$, o morfizmie p mówimy, że jest **pulbakiem g wzdłuż f** , a o morfizmie q , że jest **pulbakiem f wzdłuż g** .

Niech $Z \xrightarrow{f} A$ oraz $Z \xrightarrow{g} B$ będą morfizmami. **Puszaudem** (lub **koproduktem włóknistym** albo **kwadratem kokartezjańskim**) pary f, g nazywamy trójkę (P, p, q) złożoną z obiektu P oraz morfizmów $A \xrightarrow{p} P$ oraz $B \xrightarrow{q} P$ takich, że:

1. $p \circ f = q \circ g$;
2. dla dowolnego obiektu Q wraz z morfizmami $A \xrightarrow{r} Q$ oraz $B \xrightarrow{s} Q$ takimi, że $r \circ f = s \circ g$, istnieje dokładnie jeden morfizm $P \xrightarrow{u} Q$ taki, że $r = u \circ p$ oraz $s = u \circ q$;

innymi słowy następujący diagram:



jest przemienny. Obiekt P oznaczamy przez $A \cup_Z B$, o morfizmie p mówimy, że jest **puszautem** g **wzdłuż** f , a o morfizmie q , że jest **puszautem** f **wzdłuż** g .

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Wówczas w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją produkty binarne i ekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej pulbaki.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Wówczas w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją koprodukty binarne i koekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej puszauty.