

Moduły projektywne i iniektywne.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem z 1, P lewym unitarnym R -modułem. Następujące warunki są równoważne:

1. dla każdego lewego unitarnego R -modułu N oraz homomorfizmu $h : P \rightarrow N$ spełniony jest następujący warunek: dla dowolnego lewego unitarnego R -modułu M i każdego epimorfizmu $g : M \rightarrow N$ istnieje homomorfizm $f : P \rightarrow M$ taki, że $h = g \circ f$ tzn. taki, że diagram

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ f \swarrow & \downarrow h & \\ M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

w którym wiersz jest dokładny, jest przemienny;

2. *każdy ciąg dokładny*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

jest rozszczepialny;

3. *P jest składnikiem prostym wolnego R -modułu M .*

Definicja

*Niech R będzie pierścieniem z 1, P lewym unitarnym R -modułem. Jeśli P spełnia jeden (a zatem wszystkie) z równoważnych warunków sformułowanych w poprzednim twierdzeniu, to P nazywamy **modułem projektywnym**.*

Wniosek

Każdy moduł wolny jest projektywny.

Twierdzenie (Cartan-Eilenberg)

Niech R będzie pierścieniem lokalnym z 1, niech P będzie skończenie generowanym R -modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.

Twierdzenie (Kaplansky)

Niech R będzie pierścieniem lokalnym z 1, niech P będzie R -modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.

Twierdzenie (Seshardi-Quillen-Suslin)

Niech F będzie ciałem, niech P będzie projektywnym $F[x_1, \dots, x_n]$ -modułem. Wówczas P jest wolny.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, J lewym R -modułem. Jeśli dla dowolnego R -modułu M i homomorfizmu $h : M \rightarrow J$ spełniony jest następujący warunek: dla każdego lewego R -modułu N i każdego monomorfizmu $g : M \rightarrow N$ istnieje homomorfizm $f : N \rightarrow J$ taki, że $h = f \circ g$ tzn. taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow h & \swarrow f & \\ & & J & & \end{array}$$

w którym wiersz jest dokładny, jest przemienny, to J nazywamy **modułem injektywnym**.