Zestaw zadań 5: wielościany wypukłe i twierdzenie Eulera.

1. Czy dla każdej trójki liczb V, E, F spełniającej warunki
$$V \geqslant 4, F \geqslant 4, V - E + F = 2$$
istnieje wielloscian wypukły mający V wierzchołków, E krawędzi i F ścian?

2. Dany jest ostrosłup ścięty P, o kwadratowych podstawach, którego górna podstawa ma długość 1, zaś dolna podstawa długość 3. Dla jakich położeń punktu $A \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ obraz całego ostrosłupa w rzucie perspektywicznym o środku w punkcie A będzie się zawierał w obrazie górnej podstawy?

3. Dany jest trójkąt równoboczny $T = \triangle ABC \subseteq OXY$ oraz jego obraz T' powstały przez obrót o kąt π wokół osi prostopadłej do płaszczyzny OXY i przechodzącej przez środek ciężkości trójkąta złożony z przesunięciem o wektor $[0, 0, 1]$. Wyznaczyć liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian otoczki wypukłej zbioru $T \cup T'$.

4. Dany jest wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są trójkątami. Udowodnić, że jeżeli każdy wierzchołek należy do dokładnie 5 ścian, to wielościan ten jest dwudziestościanem.

5. Dany jest wielościan wypukły P, którego wszystkie ściany są wyłącznie pięcio- i sześciokątami foremnymi. Ile ścian pięciokątnych ma ten wielościan?

6. Dany jest wielościan wypukły P, którego wszystkie ściany są wyłącznie kwadratami i sześciokątami foremnymi. Ile ścian kwadratowych ma ten wielościan?

7. Udowodnić, że w każdym wielościanie zachodzi nierówność $\max\{V, F\} \leqslant \frac{2}{3}E$.

8. Udowodnić, że w każdym wielościanie wypukłym zachodzą nierówności
$$E + 6 \leqslant 3V \leqslant 2E \leqslant 6V - 12, E + 6 \leqslant 3F \leqslant 2E \leqslant 6F - 12.$$