**Zestaw zadań 4: twierdzenia Ceva'y i Menelausa.**

1. Udowodnić, że punkty przecięć dwusiecznych kątów zewnętrznych trójkąta z przedłużeniami przeciwległych boków są współliniowe.
2. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkty $P$ i $Q$ leżące na bokach, odpowiednio, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Niech dalej punkty $K$ i $L$ będą punktami przecięć trójkątów $\triangle ABQ$ i $\triangle CDP$. Udowodnić, że prosta $\mathrm{af}(K, L)$ przechodzi przez środek równoległoboku.
3. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Punkty $A', B', C'$ są punktami styczności okręgów dopisanych stycznych do boków, odpowiednio, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Udowodnić, że proste $\mathrm{af}(A, A')$, $\mathrm{af}(B, B')$ i $\mathrm{af}(C, C')$ są współpękowe.
4. **Symedianą** nazywamy obraz środkowej trójkąta w symetrii osiowej względem dwusiecznej wychodzącej z tego samego wierzchołka. Udowodnić, że:
   a) $\overline{AA'}$ jest symedianą trójkąta $\triangle ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy
   $$\frac{|BA'|}{|CA'|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2},$$
   b) w dowolnym trójkącie symediany są współpękowe.
5. **(twierdzenie Monge'a)** Udowodnić, że dla dowolnych trzech parami rozłącznych okręgów punkty przecięć trzech par prostych stycznych zewnętrznie do odpowiednich par okręgów są współliniowe.
6. Niech $\triangle P_0P_1P_2P_3$ będzie czworościanem Dane są punkty $Q_{ij}$, $0 \leqslant i < j \leqslant 3$, takie, że $Q_{ij} \in \mathrm{af}(P_i, P_j)$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   a) punkty $Q_{ij}$ są współpłaszczyznowe,
   b) dla każdej pary indeksów $0 \leqslant i < j < k \leqslant 3$ punkty $Q_{ij}, Q_{ik}, Q_{jk}$ są współliniowe.