

Zestaw zadań 3: kwaterniony.

1. Obliczyć wartości następujących wyrażeń w \mathbb{H} :

a) $(i - j) \cdot (j - k) \cdot (k - i)$,

b) $(i + j)^2 + (i + k)^2 + (j + k)^2$,

c) $384 - 36kj + 42j + 720ij - (3 + 7j)^2 - (2 + 9i)^2 - (4 - 5k)^4$,

d) $\frac{4}{1 + i + j + k}$,

e) $14 \cdot \frac{2 + i}{3 - j + 2k} + 74 \cdot \frac{3 - j - k}{5 + 7k}$.

2. Udowodnić, że dla dowolnych kwaternionów $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$ zachodzą równości:

a) $\overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}} \cdot \overline{\mathbf{q}}$, b) $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \overline{\mathbf{q}}$, c) $N(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = N(\mathbf{q}) \cdot N(\mathbf{r})$.

3. Obliczyć wartość wyrażenia $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{k}{2}\right)^{12}$.

4. Udowodnić, że jeśli $\mathbf{q} = (\cos \varphi) + (v \cdot \sin \varphi)$, gdzie $v \in \mathbb{R}^3$ jest postacią trygonometryczną kwaternionu $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to wówczas

$$\mathbf{q}^n = (\cos(n\varphi)) + (v \cdot \sin(n\varphi)).$$

5. Obliczyć wartości wyrażeń

a) \mathbf{q}^{1024} , gdzie $\mathbf{q} = \frac{1 + i + j + k}{2}$, b) \mathbf{r}^{3072} , gdzie $\mathbf{r} = \frac{-1 + i + j + k}{2}$.

6. Udowodnić, że jeśli $\mathbf{q} = (\cos \varphi) + (v \cdot \sin \varphi)$ oraz $\mathbf{r} = (\cos \psi) + (v \cdot \sin \psi)$, gdzie $v \in \mathbb{R}^3$ są postaciami trygonometrycznymi kwaternionów $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$, to wówczas

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = (\cos(\varphi + \psi)) + (v \cdot \sin(\varphi + \psi)).$$

7. Niech $M_{\mathbf{q}}^L$ i $M_{\mathbf{q}}^R$ będą macierzami lewostronnego i prawostronnego mnożenia przez kwaternion \mathbf{q} . Udowodnić, że dla dowolnych $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$:

$$M_{\mathbf{q}}^R \cdot M_{\mathbf{r}}^L = M_{\mathbf{r}}^L \cdot M_{\mathbf{q}}^R.$$

8. Wyznaczyć oś i kąt obrotu $R_{\mathbf{q}}$ wyznaczonego przez kwaternion $\mathbf{q} = \frac{1 + i + j + k}{2}$.