Zestaw zadań 2: Moduły.

1. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $\mathcal{R}=\{N_i: i\in I\}$ rodziną podmodułów modułu M. Pokazać, że wówczas:

   a. $\bigcap_{i\in I} N_i$ jest podmodułem modułu M,

   b. $\bigcup_{i\in I} N_i$ jest podmodułem modułu M wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}$ jest łańcuchem.

2. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, niech $S\subset M$. Pokazać, że wówczas:

$$\langle S\rangle=\{a_1\,s_1+\ldots+a_n\,s_n+b_1\,t_1+\ldots+b_m\,t_m: a_i\in R, s_i\in S, b_j\in\mathbb{Z}, t_j\in S\}.$$

   Ponadto pokazać, że jeśli R jest pierścieniem z jedynką, a M lewym unitarnym R-modułem, to wówczas:

$$\langle S\rangle=\{a_1\,s_1+\ldots+a_n\,s_n: a_i\in R, s_i\in S\}.$$

3. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, niech $N_1, N_2 < M$. Pokazać, że wówczas

$$\langle N_1\cup N_2\rangle=\{n_1+n_2: n_1\in N_1, n_2\in N_2\}.$$

4. Wskazać przykład skonczenie generowanego modułu, który nie jest skończenie generowaną grupą abelową.

5. Niech R i S będą pierścieniami, niech $\phi: R\to S$ będzie homomorfizmem pierścieni. Pokazać, że dowolny S-moduł M może być wyposażony w strukturę R-modułu poprzez zdefiniowanie działania $r\,m$, $r\,i\,n\,R$, $m\in M$ jako $\phi(r)\,m$.

6. Niech R będzie pierścieniem, $I\lhd R$ ideałem dwustronnym, M niech będzie lewym R-modułem. Pokazać, że $M/I\,M$ jest R/I-modułem z działaniem zewnętrznym $(r+I)\,(a+I\,A)=r\,a+I\,A$.

7. Pokazać, że homomorfizm modułów jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest homomorfizmem kategoryjnym.

8. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, ϕ: $M\to N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Pokazać, że wówczas:

   a. $\phi(M_1) < N$;

   b. $\phi^{-1}(N_1) < M$.

9. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, π: $M\to N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K=\ker\pi$. Oznaczmy

$$\mathcal{M}=\{M_1: M_1 < M \text{ oraz } K\subset M_1\}, \mathcal{N}=\{N_1: N_1 < N\}.$$

   Pokazać, że wówczas odwzorowania

$$\phi: \mathcal{M}\to\mathcal{N}, \phi(M_1)=\pi(M_1),$$

$$\psi: \mathcal{N}\to\mathcal{N}, \psi(N_1)=\pi^{-1}(N)\,1)$$

   są wzajemnie odwrotne.

10. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N < M$. Oznaczmy

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodowania i mnożenia zewnętrznego:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a\,(m + N) = a\,m + N.$$

Pokazać, że wówczas M/N jest lewym R-modułem.

11. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N \subset M$. Pokazać, że wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem pewnego homomorfizmu.

12. Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R-modułami, $\phi_1: M \to N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2: M \to N_2$ homomorfizmem.

    a. Pokazać, że jeśli istnieje homomorfizm $\psi: N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$, to $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$.

    b. Pokazać, że jeśli $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi: N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ponadto wówczas $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Im} \phi_2$ oraz $\ker \psi = \phi_1(\ker \phi_2)$.

13. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$. Pokazać, że wówczas

$$N_1 / N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2) / N_2.$$

14. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, N_1, $N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Pokazać, że wówczas

$$M / N_2 \cong (M / N_1) / (N_2 / N_1).$$

15. Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R-modułem cyklicznym. Pokazać, że wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \lhd R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.