Zestaw zadań 1: powtórka z algebry liniowej.

1. Sprawdzić, które z poniższych podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami, jeśli K jest dowolnym ciałem.

   (a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$;

   (b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$;

   (c) $U = \{[t\,u, u, t, 0] : t, u \in K\}$;

   (d) $U = \{[x, y, z, t] : x + y - z = 0\}$;

   (e) $U = \{[x, y, z, t] : x\,y = 0\}$;

   (f) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u\,[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.

2. Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, jeśli

   (a) U_1 jest zbiorem rozwiązań równania of $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ oraz $U_2 = \operatorname{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

   (b) U_1 jest zbiorem rozwiązań $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 3\,x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ oraz $U_2 = \operatorname{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

3. Sprawdzić, czy wektory α oraz β są kombinacjami liniowymi układu wektorów $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli

   (a) $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$;

   (b) $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$, $\alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Sprawdzić, czy układ wektorów $(\alpha_1, ..., a_n)$ przestrzeni K^4 jest liniowo niezależny, jeśli

   (a) $K = \mathbb{Z}_7$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$;

   (b) $K = \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$;

   (c) $K = \mathbb{C}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3\,i \\ 5 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2\,i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$;

   (d) $K = \mathbb{Z}_5$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. Sprawdzić, że wektory α_1, ..., α_n tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^n$ i wyznaczyć współrzędne wektora β w tej bazie, jeśli

(a) $n=3$; $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}6\\9\\14\end{bmatrix}$;

(b) $n=3$; $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}6\\2\\-7\end{bmatrix}$;

(c) $n=4$; $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}7\\14\\-1\\2\end{bmatrix}$.

6. Wyznaczyć bazę i wymiar podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ jeśli:

(a) $\alpha_1=\begin{bmatrix}5\\2\\-3\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\1\\-2\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\\2\end{bmatrix}$;

(b) $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\5\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\-2\\3\\4\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}4\\-1\\15\\17\end{bmatrix}$, $\alpha_5=\begin{bmatrix}7\\-6\\-7\\0\end{bmatrix}$;

(c) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\-4\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\-5\\8\\-3\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}5\\26\\-9\\-12\end{bmatrix}$, $\alpha_5=\begin{bmatrix}3\\-4\\1\\2\end{bmatrix}$.

7. Wyznaczyć bazy podprzestrzeni U_1+U_2 oraz $U_1\cap U_2$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli:

(a) $U_1=\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\3\\-1\end{bmatrix}\right)$, $U_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\colon x_1+x_2-2x_3+x_4=0\right\}$;

(b) $U_1=\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-1\\1\\-3\end{bmatrix}\right)$, $U_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\colon x_1-x_2+x_3+x_4=0\right\}$;

(c) $U_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\colon 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0\right\}$, $U_2=\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\1\\5\end{bmatrix}\right)$;

(d) $U_1=\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\5\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\5\end{bmatrix}\right)$, $U_2=\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$.

8. Które z odwzorowań $\varphi\colon K^n\to K^m$ są liniowe, jeżeli:

(a) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+z\\2x+z\\3x-y+z\end{bmatrix}$; (b) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\y+1\\z+2\end{bmatrix}$;

(c) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x+y \\ x+z \\ z \end{bmatrix}$; (d) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x-y+z \\ z \\ y \end{bmatrix}$;

(e) $n=4$, $m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix}$;

(f) $n=4$, $m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z-t \\ x-z-t \end{bmatrix}$;

(g) $n=m=4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y+t \\ y+z \end{bmatrix}$;

(h) $n=m=4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y-3t \\ 2x+4y+z-2t \end{bmatrix}$;

(i) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+z \\ 2xz \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$.

Jeśli φ jest odwzorowanie liniowym, sprawdzić czy jest monomorfizmem lub epimorfizmem oraz wyznaczyć jego jądro i obraz.

9. Niech V, V_1, V_2, W będą przestrzeniami liniowymi i niech $V=V_1\oplus V_2$. Pokazać, że dla każdej pary odwzorowań liniowych $\varphi_i\colon V_i\to W$, $i=1,2$, istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi\colon V\to W$ takie, że $\varphi|_{V_i}=\varphi_i$. Jeśli $V=W$ oraz $\varphi_1=\mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi_2=-\mathrm{Id}_{V_2}$ to φ nazywamy **symetrią** przestrzeni V_1 wzdłuż V_2 . Jeśli $\varphi_1=\mathrm{Id}_{V_1}$, oraz φ_2 jest odwzorowaniem zerowym, to φ nazywamy **rzutem** przestrzeni V na V_1 wzdłuż V_2 .

10. Niech $V=V_1\oplus V_2$. Wyznaczyć jądra i obrazy symetrii przestrzeni V_1 wzdłuż V_2 oraz rzutu przestrzeni V na V_1 wzdłuż V_2.

11. Przekształcenie liniowe $\varphi\colon K^2\to K^3$ dane jest wzorem $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}$. Wyznaczyć:

(a) obrazy następujących podprzestrzeni: K^2, $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in K^2\colon 2x+3y=0\right\}$;

(b) przeciwobrazy następujących podprzestrzeni: K^3, $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in K^3\colon x+y+z=0\right\}$.

12. Wyznaczyć:

(a) symetrię w $\mathbb{R}^2$ przestrzeni $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

(b) symetrię w $\mathbb{R}^3$ przestrzeni $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$;

(c) rzut przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$;

(d) rzut przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ wzdłuż $\mathrm{lin}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$.

13. W przestrzeni K^3 rozważmy bazy $\mathcal{A}_3 = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$, zaś w przestrzeni K^4 bazy $\mathcal{A}_4 = \left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}_4 = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$. Wyznaczyć macierz odwzorowania liniowego $\varphi\colon K^n \to K^m$ w bazach $\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$ ($\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$), jeśli:

(a) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+z\\2x+z\\3x-y+z\end{bmatrix}$; (b) $n=m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-y+z\\y\\z\end{bmatrix}$;

(c) $n=4, m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-y+2t\\2x+3y+5z-t\\x+z-t\end{bmatrix}$;

(d) $n=4, m=3$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-y+2t\\2x-3y+5z-t\\x-z-t\end{bmatrix}$;

(e) $n=3$, $m=4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+3y-2z\\x+y+z\\2y\\y+z\end{bmatrix}$; (f) $n=3$, $m=4$, $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+3y-2z\\x+y+z\\2y-3z\\2x+4y+z\end{bmatrix}$.

14. Niech $\varphi\colon K^3 \to V_1$ będzie rzutem, zaś $\psi\colon K^3 \to K^3$ symetrią V_1 wzdłuż V_2, gdzie:

(a) $V_1 = \mathrm{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $V_2 = \mathrm{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$;

(b) $V_1 = \mathrm{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $V_2 = \mathrm{lin}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$;

(c) $V_1 = \mathrm{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2)$, $V_2 = \mathrm{lin}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$.

Wyznaczyć macierz φ w bazach $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 oraz $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ przestrzeni V_1. Wyznaczyć macierz ψ w bazach $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3.

15. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z bazami $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ bazę kanoniczną $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$. Wyznaczyć macierze przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{A}$, od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{B}$, od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{E}$ oraz od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, jeśli:

(a) $n=2$, $\mathcal{A}=\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}\right)$;

(b) $n=3$, $\mathcal{A}=\left(\begin{bmatrix}8\\-6\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-16\\7\\-13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9\\-3\\7\end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right)$;

(c) $n=4$, $\mathcal{A}=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$.

16. Wyznaczyć macierz odwzorowania $\varphi\colon K^3 \to K^3$ w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2+\varepsilon_3, \varepsilon_1+\varepsilon_2)$ jeżeli macierzą φ w bazie

    (a) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, (b) $(\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

    jest $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

17. Endomorfizm $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ ma następującą macierz w bazie $\mathcal{A}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\right)$:

    (a) $\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}2&1\\-1&5\end{bmatrix}$.

    Wyznaczyć wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ. Jak zmieni się rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\mathcal{A}$ jest bazą kanoniczną? A jak, jeżeli założymy, że $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$?

18. A jest macierzą endomorfizmu $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ w bazie kanonicznej. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne φ. O ile jest to możliwe, wyznaczyć bazę $\mathbb{C}^n$złożoną z wektorów własnych φ oraz macierz $C \in GL(n,\mathbb{C})$ taką, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

    $n=2:$ (a) $A=\begin{bmatrix}0&2\\-3&5\end{bmatrix}$; (b) $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}$; (c) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}$; (d) $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}$;

    $n=3:$ (e) $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$; (f) $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$; (g) $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$;

    $n=4:$ (h) $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}$; (i) $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&2&0&0\\3&0&0&0\end{bmatrix}$; (j) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&2&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&2\end{bmatrix}$;

    (k) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$; (l) $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-6&1&7&-1\end{bmatrix}$; (m) $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\3&0&1&0\\-1&0&0&1\\-2&0&0&0\end{bmatrix}$.

19. Wyznaczyć wzór na A^n, jeżeli A równe jest

    (a) $\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}0&2\\-3&5\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}$.

20. Wyznaczyć wzór na a_n, jeżeli

    (a) $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ (ciąg Fibonacciegio);

    (b) a_0=1, $a_1=2$, $a_{n+2}=3\,a_n-2\,a_{n+1}$.