6 Homologia symplicjalna.

6.1 Moduły wolne.

Definicja 6.1. *Niech M będzie lewym $R-$ modułem. Podzbiór $\mathcal{B} \subseteq M$ nazywamy **bazą**, jeżeli jest **liniowo niezależny:***

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall a_1, ..., a_n \in R \forall m_1, ..., m_n \in M [(a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n = 0) \Rightarrow (a_1 = \cdots = a_n = 0)],$$

oraz $\langle \mathcal{B} \rangle = M$.

*Moduł, który ma bazę, nazywamy **modułem wolnym**.*

Przykłady:

1. Każda przestrzeń wektorowa jest modułem wolnym z bazą równą bazie przestrzeni.
2. R jest modułem wolnym z bazą 1.
3. R^n jest modułe wolnym z bazą $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$.
4. $R[x]$ jest modułem wolnym z bazą $1, x, x^2, x^3, ...$.

6.2 Moduły homologii.

Definicja 6.2. *Niech* $\Delta^n(P_0, P_1, ..., P_n)$ *będzie sympleksem o wierzchołkach* $P_0, P_1, ..., P_n$. *Dwa uporządkowania* $P_{k_0} \leq_1 P_{k_1} \leq_1 ... \leq_1 P_{k_n}$ *oraz* $P_{l_0} \leq_2 P_{k_1} \leq_2 ... \leq_2 P_{l_n}$ *jego wierzchołków są* ***równoważne****, jeżeli istnieje parzysta permutacja* $\pi \in S(n)$ *taka, że*

$$l_i = \pi(k_i), \ \ dla\ i \in \{0, ..., n\}.$$

Uwaga 6.3. Relacja równoważności uporządkowań wierzchołków sympleksu jest, istotnie, równoważnością. Dla sympleksów σ o wymiarze $\dim \sigma > 0$ rozbija ona zbiór wszystkich uporządkowań na dwie rozłaczne klasy abstrakcji, zaś dla sympleksów zerowymiarowych wyznacza tylko jedną klasę abstrakcji.

Definicja 6.4. *Klasę abstrakcji relacji równoważności uporządkowań wierzchołków sympleksu nazywamy* ***orientacją sympleksu.*** *Sympleks z ustaloną orientacją nazywamy* ***zorientowanym sympleksem.***

Notacja 6.5. *Sympleks generowany przez punkty* $P_0, P_1, ..., P_n$ *będziemy oznaczać przez*

$$\Delta^n(P_0, P_1, ..., P_n),$$

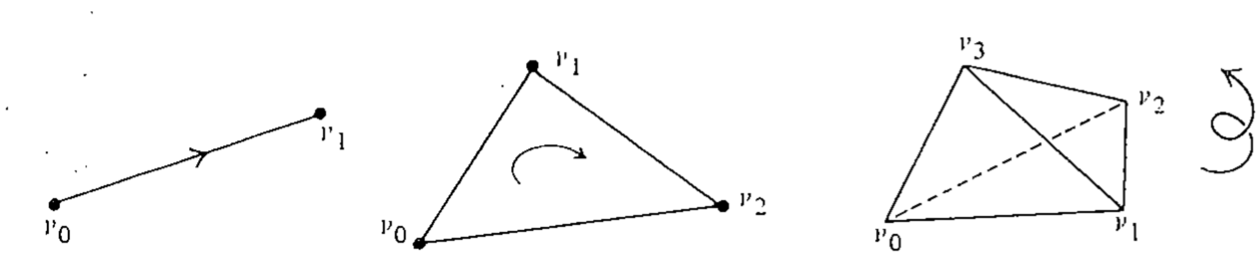
zorientowany sympleks o orientacji $P_0 \leq P_1 \leq ... \leq P_n$ *przez*

$$\Delta^n[P_0, P_1, ..., P_n],$$

zaś klasę abstrakcji orientacji $P_0 \leq P_1 \leq ... \leq P_n$ *przez*

$$\Delta^n\langle P_0, P_1, ..., P_n\rangle.$$

Przykład 6.6. Orientację sympleksu często będziemy oznaczać strzałkami. Zorientowany 1-sympleks $\Delta^1[P_0, P_1]$ będziemy po prostu zaznaczać strzałką biegnącą od P_0 do P_1. Zorientowany 2-sympleks $\Delta^2[P_0, P_1, P_2]$ będziemy zaznaczać zaokrągloną strzałką wskazującą kierunek orientacji. Zorientowany 3-sympleks $\Delta^3[P_0, P_1, P_2, P_3]$ będziemy zaznaczać spiralną strzałką wskazującą kierunek orientacji zogdny z regułą lewego lub prawego kciuka:



Definicja 6.7. *Niech K będzie kompleksem symplicjalnym.*

Modułem zorientowanych p-łańcuchów *nazywamy $R-$ moduł wolny z bazą*

$$\{\Delta^p[P_0, P_1, ..., P_p] |\, \Delta^p(P_0, P_1, ..., P_p) \in K\}.$$

i oznaczamy przez $C_p(R, K)$.

W przypadku, gdy $R = \mathbb{Z}$, ***grupę*** *zorientowanych p-łańcuchów $C_p(\mathbb{Z},\, K)$ oznaczamy przez $C_p(K)$.*

Uwaga 6.8. Moduł $C_0(R,K)$ ma naturalną bazę wyznaczoną przez jedyną orientację wszystkich 0-sympleksów w K. Moduły $C_p(R, K)$, dla $p > 0$, mają różne bazy wyznaczane przez różne możliwe orientacje.

Uwaga 6.9. Rozważmy odwzorowanie $\delta_p\colon C_p(R,K) \to C_{p-1}(R,K)$ zdefiniowane w następujący sposób: jeżeli $\Delta = \Delta^p[P_0, P_1, \ldots, P_p]$ jest zorientowanym sympleksem, $p > 0$, to

$$\delta_p \Delta = \sum_{i=0}^{p} (-1)^p \Delta^{p-1}[P_0, P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_p],$$

gdzie symbol $\hat{P}_i$ oznacza, że wierzchołek P_i został pominięty. Wówczas δ_p jest dobrze określonym homomorfizmem. Dla $p < 0$ moduł $C_p(R,K)$ jest trywialny, a więc, w szczególności, dla $p \leq 0$ δ_p jest trywialnym homomorfizmem.

Definicja 6.10. *Homomorfizm zdefiniowany w Uwadze 6.9 będziemy nazywać* ***operatorem brzegowym.***

Lemat 6.11. $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

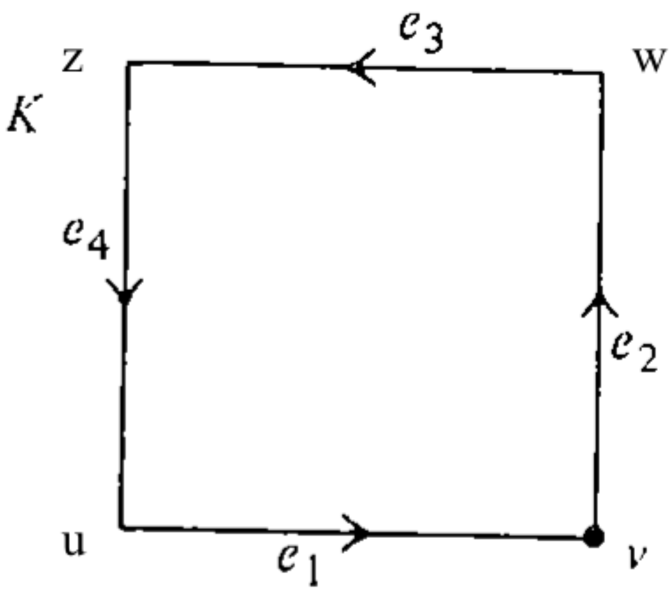
Wniosek 6.12. $\operatorname{Im} \delta_{p+1} \subset \operatorname{Ker} \delta_p \subset C_p(K)$.

Definicja 6.13. *Moduł* $\operatorname{Ker} \delta_p$ *nazywamy modułem* ***p-cykli*** *i oznaczamy* $Z_p(R, K)$.

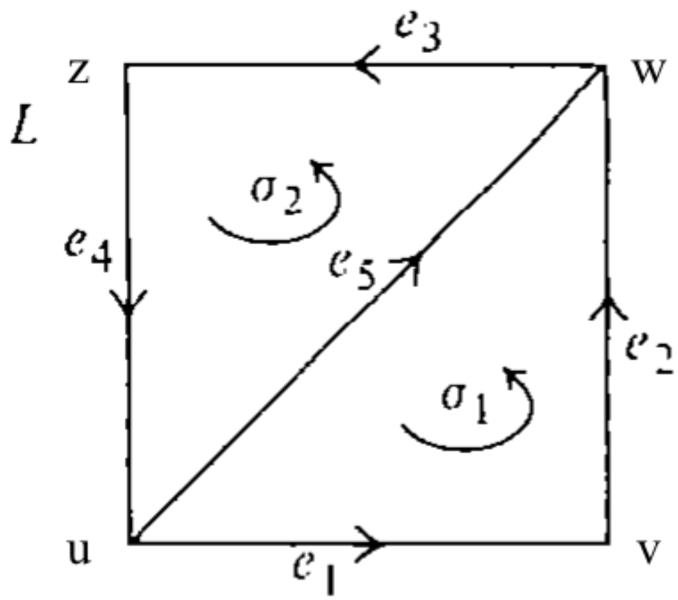
Moduł $\operatorname{Im} \delta_{p+1}$ *nazywamy modułem* ***p-brzegów*** *i oznaczamy* $B_p(R, K)$.

Moduł $\operatorname{Ker} \delta_p / \operatorname{Im} \delta_{p+1}$ *nazywamy* ***p-tym modułem homologii K*** *i oznaczamy* $H_p(R, K)$.

Przykład 6.14. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzenią jest brzeg kwadratu o bokach e_1, e_2, e_3, e_4:



Przykład 6.15. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzenią jest kwadrat o bokach e_1, e_2, e_3, e_4. Dla opisania wszystkich sympleksów dorysujmy jeszcze przekątną e_5:



L
z
w
u
v
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
σ_1
σ_2