5 Wielościany wypukłe i twierdzenie Eulera.

5.1 Grafy planarne.

Definicja 5.1. ***Grafem*** *nazywamy parę* (V, E)*, gdzie* V *jest zbiorem punktów zwanych* ***wierzchołkami*** *grafu, a* E *jest pewnym zbiorem odcinków łączących wierzchołki, zwanych* ***kwawędziami.*** *Krawędź* e *łączącą wierzchołki* v *i* u *będziemy oznaczać przez* $e = (u, v)$*.*

Graf nazywamy ***skończonym****, jeżeli zbiór* V *jest skończny.*

Graf nazywamy ***planarnym****, jeżeli istnieje zanurzenie* $(V, E) \hookrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *takie, że żadne dwie różne krawędzie w obrazie grafu się nie przecinają.*

Ciąg krawędzi w grafie łączący kolejne wierzchołki nazywamy ***ścieżką****, zaś graf, w którym każde dwa wierzchołki można połączyć ścieżką nazywamy grafem* ***spójnym****.*

Definicja 5.2. *Obszary wyznaczone na płaszczyźnie przez krawędzie grafu planarnego nazywamy jego* ***ścianami****.*

Dla skończonego grafu planarnego (V,E) oznaczmy:

- $V=$ liczba wierzchołków,
- $E=$ liczba krawędzi,
- $F=$ liczba ścian.

Definicja 5.3. *Niech (V,E) będzie skończonym grafem planarnym. Liczbę*

$$\chi(V,E)=V-E+F$$

*nazywamy **charakterystyką Eulera** grafu.*

Twierdzenie 5.4. *W dowolnym skończonym spójnym grafie planarnym* (V, E)

$$\chi(V, E) = 2.$$

5.2 Wielościany wypukłe.

Definicja 5.5. ***Kompleksem symplicjanym*** K *nazywamy skończony zbiór sympleksów taki, że*

i. każda ściana sympleksu w K *jest w* K*,*

ii. część wspólna dowolnych dwóch sympleksów z K *jest ich wspólną ścianą.*

Definicja 5.6. ***Wymiarem*** *kompleksu nazywamy najwyższy spośród wymiarów tworzących go sympleksów.*

Kompleks nazywamy ***jednorodnym*** *wymiaru* n*, jeżeli każdy jego sympleks wymiaru niższego niż* n *jest ścianą pewnego sympleksu wymioaru* n*.*

Definicja 5.7. *Sumę mnogościową wszystkich sympleksów pewnego kompleksu K nazywamy **nośnikiem** kompleksu K i oznaczamy przez $|K|$.*

*Podzbiór $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ równy nośnikowi pewnego kompleksu jednorodnego K wymiaru k nazywamy **wielościanem** wymiaru k, zaś kompleks K jego **triangulacją**.*

*Wielościan wymiaru 1 nazywamy **łamaną**, wymiaru 2 – **wielokątem**, a wymiaru 3 – **wielościanem**.*

Definicja 5.8. *Podzbiór* $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *nazywamy* ***wypukłym****, jeżeli wraz z dowolnymi swymi dwoma punktami zawiera też odcinek je łączący.*

Twierdzenie 5.9. (Euler) *Niech wielościan wypukły w* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ *ma* V *wierzchołków,* E *krawędzi i* F *ścian. Wówczas*

$$V - E + F = 2.$$

5.3 Bryły platońskie.

Definicja 5.10. *Wielokąt* $P \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *nazywamy* ***foremnym****, jeżeli*

i. wszystkie jego boki są równej długości,

ii. wszystkie jego kąty wewnętrzne są równej miary.

Definicja 5.11. *Wielościan wypukły* $P \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ *nazywamy* ***foremnym*** *(lub* ***bryłą platońską****), jeżeli*

i. wszystkie jego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi,

ii. każdy jego wierzchołek należy do takiej samej liczby ścian.

Twierdzenie 5.12. *Jedynymi bryłami platońskimi są:*

- *czworościan foremny,*
- *sześcian,*
- *ośmiościan foremny,*
- *dwunastościan foremny,*
- *dwudziestościan foremny.*

5.4 Twierdzenie Eulera w dowolnym wymiarze.

Definicja 5.13. *Niech K będzie kompleksem symplicjalnym, niech $\kappa_i(K)$ oznacza liczbę sympleksów w K wymiaru i.* ***Charakterystyką Eulera*** *kompleksu symplicjalnego K nazywamy liczbę:*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim K} (-1)^i \kappa_i(K).$$

Twierdzenie 5.14. *Niech P będzie wielościanem wypukłym o triangulacji K. Wówczas*

$$\chi(K) = 1.$$